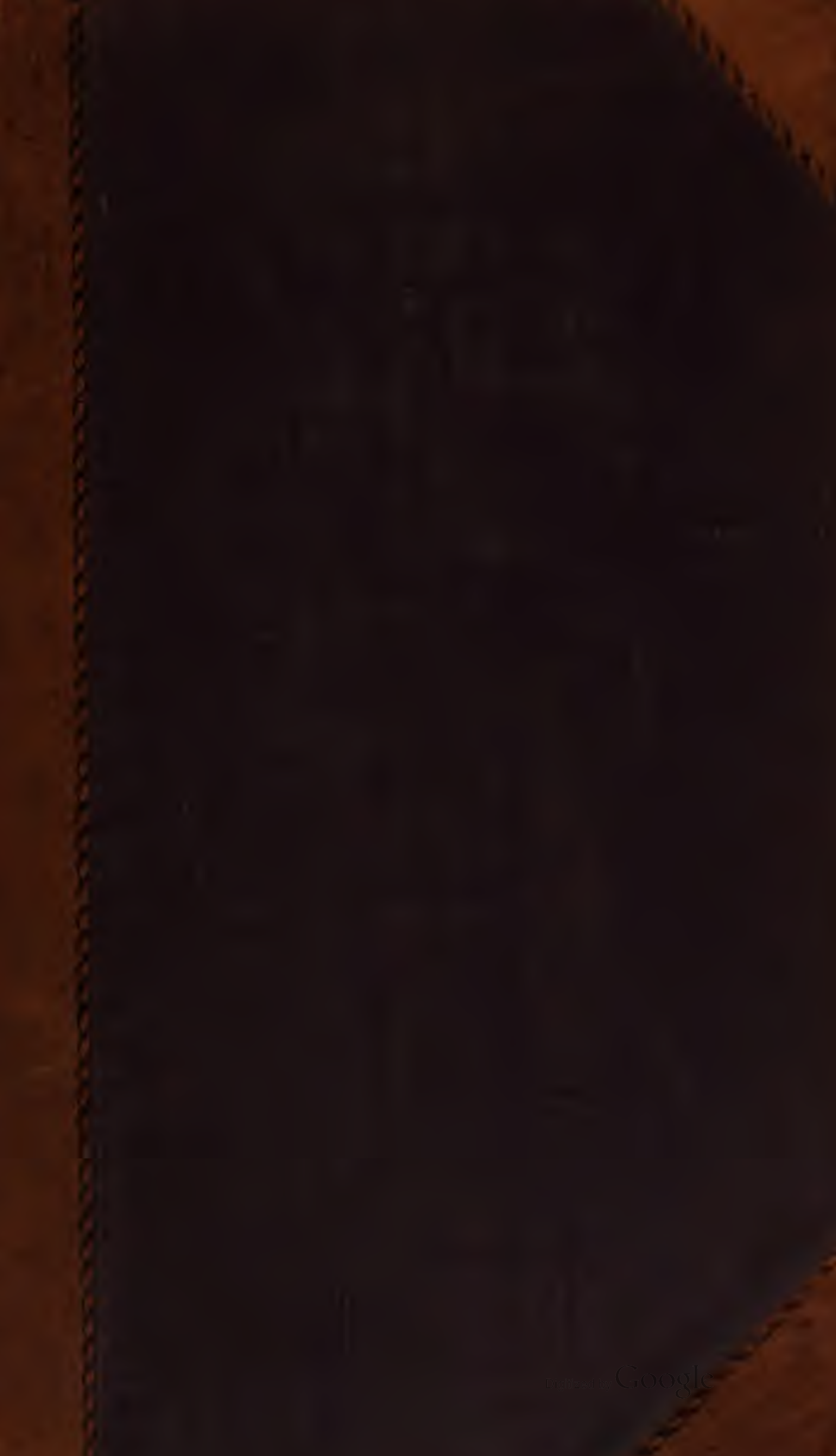



Digitized by Google

ZEITSCHRIFT

FÜR

PHYSIK

UND

MATHEMATIK.

Herausgeber:

A. Baumgartner und A. v. Ettingshausen,

ordentliche Professoren an der k. k. Universität zu Wien.

Erster Band.

Mit vier Kupfertafeln.

Wien 1826.

Verlag von J. G. Heubner.


BIBLIOTHECA BODLEIANA

VORREDE.

Je eifriger und von je mehreren eine Wissenschaft betrieben wird, desto reger äussert sich der Wunsch, mit den Fortschritten bekannt zu werden, welche diese Wissenschaft in anderen Ländern gemacht hat. In den österreichischen Staaten sind die Freunde der physikalischen Wissenschaften sehr zahlreich und das Verlangen, in diesem Gebiete auch die Arbeiten des Auslandes kennen zu lernen, sehr laut geworden, und man muss dieses als ein gutes Zeichen der Zeit ansehen. So gut man aber auch von den Producten des deutschen Fleisses durch die bereits bestehenden deutschen Zeitschriften über Physik in Kenntniss gesetzt wird, so bleibt doch manche sehr gediegene Arbeit der Engländer, Franzosen und Italiener übrig, welche in deutschen Journalen, bei aller Umsicht und Thätigkeit ihrer Herausgeber, keinen Platz finden kann, weil diese, wie billig, zuerst das aufnehmen, was

auf deutschem Boden wächst, und dabei um so seltener für ausländische physikalische Producte Raum bleibt, als dieser durch die Chemie fast allenthalben stark eingeengt wurde. Für die Verbreitung mathematischer Arbeiten ist noch weniger gesorgt, wahrscheinlich, weil man bei der geringen Zahl der Freunde dieser Wissenschaft Mangel an Lesern fürchtet; allein die beschränkte Zahl mathematischer Leser ist gewiss zum Theile durch den Mangel an Verbreitungsmitteln solcher Kenntnisse bedingt. Würde wohl die Physik und Chemie so um sich gegriffen haben, wenn es keinen Gren und Gilbert, keinen Gehlen und Schweigger gegeben hätte, die durch ihre Zeitschriften diesen Wissenschaften, gewiss eben so viele Freunde erworben haben, als es diese Wissenschaften selbst durch ihre innere Kraft vermochten? Diese Gründe mögen das Erscheinen einer neuen Zeitschrift rechtfertigen, welche sich zum Zweck macht, die besten physikalischen und mathematischen Arbeiten des Auslandes, sie mögen in Journalen oder Abhandlungen gelehrter Gesellschaften oder in nicht periodischen Schriften enthalten seyn, in treuen oder abgekürzten Uebersetzungen, in freien Bearbeitungen oder Auszügen, vorzüglich in den österreichischen Staaten bekannt zu machen, und diesen auch Originalarbeiten des In-

landes einzuverleiben. Für solche Leser, die sich in weitere wissenschaftliche Erörterungen nicht einlassen wollen oder können, soll sie auch einen fortlaufenden Artikel enthalten, der die Fortschritte der Physik in der neueren Zeit in gedrängter Kürze enthält und gleichsam einen Auszug aus den besten physikalischen Zeitschriften aller Nationen darstellt. Von der Chemie soll nur das aufgenommen werden, was in das Gebiet der physikalischen gehört. Die Bearbeitung dieses Zweiges hat Herr Professor Pleischl in Prag übernommen, so wie die eigentlich physikalischen Artikel vom ersten, und die mathematischen vom zweiten der genannten Herausgeber besorget werden, ohne jedoch hierin eine feste Grenze zu setzen.

Uebrigens erscheint diese Zeitschrift in zwanglosen Heften, jedes von 8—9 Bogen, deren vier einen Band ausmachen. Wiewohl man zwischen dem Erscheinen der einzelnen Hefte keinen grossen Zeitraum lassen wird, so will man sich doch an keine bestimmte Zeit binden, um sich ganz nach den Fortschritten der Wissenschaften richten zu können, und nicht in die Nothwendigkeit versetzt zu werden, Lückenbüsser aufzunehmen. Wer einen dem Zwecke dieser Zeitschrift entsprechenden Originalaufsatz in dieselbe aufgenommen wissen will,

wird ersucht, ihn der Verlagshandlung portofrei einzusenden, durch welche auch gleich nach dem Erscheinen desselben ein anständiges Honorar entrichtet wird.

Wien den 15. März 1826.

Die Herausgeber.

ZEITSCHRIFT
FÜR PHYSIK UND MATHEMATIK.

PHYSIKALISCHE ABTHEILUNG.

I. Aräometer zur schnellen Bestimmung des specifischen Gewichtes fester Körper, von A. Baumgartner.

Der Werth eines Instrumentes zur Bestimmung des specifischen Gewichtes der Körper richtet sich zwar in der Regel nur nach dem Grade der Genauigkeit, die es gewährt; allein zu vielerlei Zwecken erlässt man dem Resultate der Bestimmung gerne etwas von seiner Schärfe, wenn man dafür nur schnell eine Angabe erhält, die in den ersten Ziffern richtig ist. Diesem Umstande allein verdanken wohl unsere Aräometer mit Scalen ihre grosse Verbreitung, denn sie führen schnell zum Zwecke, wiewohl auf Kosten der Genauigkeit. Für feste Körper kannte man bis jetzt kein aräometrisches Mittel, das in Rücksicht der Leichtigkeit des Gebrauches sich jenen Instrumenten an die Seite stellen könnte, denn das Nicholsonsche Aräometer, welches sich ihnen noch am meisten nähert, gibt nicht das specifische Gewicht unmittelbar an, sondern nur die Data zu dessen Berechnung; es ist aber

nicht jedermanns Sache, diese wenn auch äusserst einfache Rechnung zu vollziehen.

Das folgende Instrument dürfte daher Manchem nicht unangenehm seyn, indem es das specifische Gewicht fester Körper zwar mit geringer Schärfe, aber dafür entweder unmittelbar ohne alle Rechnung oder mittelst einer einfachen Multiplication angibt.

Fig. 1 stellt dieses Instrument vor, und zeigt, dass es zwischen einem Nichelsonschen und einem gewöhnlichen Scalenaräometer das Mittel hält. *A* stellt den Körper desselben, *B* und *C* zwei Schalen, *ED* die Scale vor. In der Einrichtung der letzteren liegt das Wesentliche dieses Instrumentes, zu deren näheren Kenntniss den Leser folgende Betrachtung führen wird:

Gesetzt, es bestehe der Hals des Instumentes aus einer völlig cylinderischen Röhre von Glas, und enthalte eine Scale, wovon vor der Hand nur die zwei äussersten Puncte verzeichnet sind, ferner sey dieses Instrument so eingerichtet, dass es sich ohne Belastung in reines Wasser von der gewöhnlichen Luftwärme bis zum untersten Punct der Scale eintaucht, der mit 1,00 bezeichnet ist. Hätte man nun das specifische Gewicht eines Körpers zu bestimmen, dessen Masse sich nach Belieben vermehren oder vermindern lässt, so könnte man es dahin bringen, dass er, auf die obere Schale des Instrumentes gelegt, die Einsenkung desselben bis zum obersten Puncte der Scale bewirkte. Würde er nun von der oberen Schale weggenommen, dafür in die untere gelegt, und sammt dem Instrumente in das vorige Wasser getaucht, so

würde nicht die ganze Scale in der Flüssigkeit stehen, und man könnte aus ihr abnehmen, der wievielte Theil derselben der Länge nach über sie hervorragt. Da sich nun die ganze Länge der Scale = 1 zu diesem hervorragenden Stücke = $\frac{a}{b}$, verhält wie das Gewicht des Körpers in der Luft zu seinem Gewichts-Verluste im Wasser; so ist dessen specifisches Gewicht $1 : \frac{a}{b} = \frac{b}{a}$, wenn man das des Wassers zur Einheit annimmt. Wenn daher die ganze Scale der Länge nach in 2, 3, 4, 5, 6 etc., allgemein in n gleiche Theile getheilt wird, und man zu jedem Theilstriche den Bruch verkehrt schreibt, der anzeigt, den wievielten Theil der ganzen Scalenlänge sein Abstand vom obersten Puncte beträgt; so wird hiedurch das specifische Gewicht des Körpers angezeigt, der auf die obere Schale des Instrumentes gelegt, die Einsenkung bis zum obersten Punct der Scale bewirkt. Auf diese Weise fände man das specifische Gewicht eines Körpers unmittelbar ohne Rechnung. Allein bei wenigen Körpern hat man es in seiner Macht, ihre Masse gerade so abzuändern, dass sie durch ihr Gewicht das Aräometer bis zum obersten Punct der Scale einzusenken vermag. Man habe nun mit einem solchen Instrumente einen Körper A zu untersuchen, dessen Gewicht zu gering ist, um die Einsenkung desselben bis zum obersten Punct der Scale zu bewirken, und es tauche sich dieses nur so weit ein, dass der $m$te Theil der Scale im Wasser stehe. Wäre dieser Theil so, wie vorhin die ganze Scale, als Einheit angenommen und eben so wie diese abgetheilt

und beziffert, so würde man offenbar durch ein dem vorigen ähnliches Verfahren das specifische Gewicht von *A* unmittelbar finden, aber es müssten die Theilstriche dieser kleineren Scale im Verhältnisse 1 : *m* einander näher liegen, als in der zuerst angenommenen grösseren.

Wenn man daher zu diesem Körper *A* irgend eine beliebige Masse, z. B. Metallstückchen, Bleischrott etc. gäbe, bis die Einsenkung auf den obersten Punct der Scale erfolgte, hierauf den Körper *A* in die untere Schale brächte, ohne die Zulage von der oberen wegzunehmen, so würde die dem Einsenkungspuncte entsprechende Zahl das specifische Gewicht dieser Masse in dem Verhältnisse 1 : *m* zu gross angeben, und man müsste dieses Resultat mit dem Quotienten dieses Verhältnisses, nämlich *m* multipliciren.

Es wäre daher nebst voriger Scale noch eine andere nothwendig, die anzeigte, den wievielten Theil der ganzen Scalenlänge das Stück von irgend einem Puncte derselben bis zum untersten beträgt. Die jedem Puucte beigesetzte Zahl gäbe dann den Werth von *m*.

Aus diesem kann man entnehmen, dass man auf folgende Weise die Scale leicht und richtig erhält: Man nehme die Länge derselben so an, dass nicht duroh eine zu grosse Ausdehnung derselben das Instrument die nöthige Stabilität verliere, aber auch nicht durch eine zu unbedeutende Kürze der Gebrauch desselben unnöthiger Weise beschränkt werde. Bei einem Instrumente, dessen Körper aus dünnem Messingblech gearbeitet ist, etwa 2 Zoll im

Durchmesser und 4 Zoll Länge hat, kann die Scale immer eine Länge von 8 — 10 Zoll bekommen, wenn man sie an dem etwa 2 Linien dicken Halse anbringt. An der Scale bemerkt man zuerst die 2 äussersten Puncte, und theilt sie der Länge nach in 2 Theile, *A* und *B*, die durch einen vertikalen Strich von einander getrennt sind. Der Theil *A* wird in 100 gleiche Theile getheilt, als wäre er zur Scale eines hunderttheiligen Thermometers bestimmt, dessen oberster Punct mit 100 der unterste mit 1 bezeichnet, die Theilstriche des Theiles *B* hingegen werden durch die des ersteren *A* bestimmt, und zwar nach folgender Tabelle:

Entsprechende Theile

der Scale *A*.	der Scale *B*.	der Scale *A*.	der Scale *B*.
100	—	86.8	7.5
95.0	20	85.7	7
94.8	19	85.5	6.8
94.5	18	85.0	6.6
94.1	17	84.4	6.4
93.7	16	83.9	6.2
93.3	15	83.4	6.0
92.9	14	82.8	5.8
92.3	13	82.2	5.6
91.7	12	81.5	5.4
91.3	11.5	80.8	5.2
91.0	11	80.0	5.0
90.5	10.5	79.2	4.8
90.0	10	78.3	4.6
89.5	9.5	77.3	4.4
88.9	9	76.2	4.2
88.3	8.5	75.0	4.0
87.5	8	73.7	3.8

Entsprechende Theile			
der Scale *A*.	der Scale *B*.	der Scale *A*.	der Scale *B*.
72.2	3.6	44.5	1.80
70.6	3.4	42.9	1.75
68.8	3.2	41.2	1.70
66.7	3.0	39.4	1.65
65.5	2.9	37.5	1.60
64.3	2.8	35.5	1.55
63.0	2.7	33.3	1.50
61.5	2.6	31.0	1.45
60.0	2.5	28.6	1.40
58.3	2.4	25.9	1.35
56.5	2.3	23.0	1.30
54.6	2.2	20.0	1.25
52.4	2.1	16.7	1.20
50.0	2.0	13.0	1.15
48.8	1.95	9.1	1.10
47.4	1.90	4.8	1.05
45.8	1.85	0.	1.00

Der Gebrauch des Aräometers mit einer solchen Scale ist nun sehr einfach: Man lege den zu bestimmenden Körper auf die obere Schale, bemerke an der Scale *A* die Zahl, welche der Oberfläche des Wassers entspricht, lege eine beliebige Masse zum abzuwägenden Körper, bis die Einsenkung auf o erfolgt, wenn dieses nicht zufällig schon ohne Zulage der Fall war, gebe den zu prüfenden Körper in die unten im Wasser befindliche Schale, ohne das Zuleggewicht aus der oberen zu nehmen, und lese die der Oberfläche des Wassers entsprechende Zahl der Scale *B* ab. Diese gibt das specifische Gewicht desselben unmittelbar an, wenn der Körper ohne Zulage die Einsenkung bis o bewirken konnte. Brauchte er aber ein

Zuleggewicht, so multiplicirt man diese Zahl mit der vorhin an der Scale *A* beobachteten und schneidet vom Producte um zwei Decimalstellen mehr ab, als der eine Factor enthält. Wäre z. B. das Instrument zuerst bis 75 der Scale *A* eingesunken, hätte aber, als der zu prüfende Körper sich in der unteren Schale befand, eine Einsenkung bis 4,5 von *B* erlitten, so erhält man als Product beider Zahlen 3375 und daher als specifishes Gewicht 3,375.

Es ist leicht einzusehen, dass die specifischen Gewichte der Körper mittelst dieses Instrumentes desto genauer gefunden werden, je näher sie dem des reinen Wassers kommen. In der Nähe dieses kann man noch recht wohl Hunderttheile des Ganzen wahrnehmen, während bei einem specifischen Gewichte über 5 nur mehr Zehntel, bei viel höheren gar nur Einheiten zu unterscheiden sind. Glücklicher Weise liegen die specifischen Gewichte der meisten Körper zwischen 1 und 4. Mir lag ursprünglich an diesem Instrumente desshalb nicht wenig, weil ich glaubte, dass Mineralogen, welche nach dem Mohsschen Systeme die Naturkörper bestimmen wollen, mit so weit genäherten Resultaten, wie sie hierdurch gefunden werden, schon zum Ziele gelangen, und diesen glaube ich auch vorzugsweise dadurch einen kleinen Dienst zu erweisen.

II. Ueber die menschliche Stimme von Felix Savart.

(Annales de Chimie et de Physique. Septemb. 1825.)

1.

Seit den Untersuchungen von Dodart, die im Jahre 1700 bekannt gemacht wurden, haben viele Physiker und Anatomen die Bildung der menschlichen Stimme zu erklären gesucht, ohne dass man eine dieser Erklärungen für zureichend halten kann; es bewegen sich auch fast alle Meinungen um denselben Grundgedanken herum.

Dodart hat die menschlichen Laute mit den Tönen verglichen, die durch Reibung der Luft an den Rändern einer geraden an gespanntem Papier angebrachten Oeffnung entstehen, und glaubte an einer vermeintlichen Aehnlichkeit zwischen den Stimmorganen des Menschen und den Mundstücken an Hoboen, Fagotten etc., eine Stütze für seine Meinung zu finden.

Ferrein hielt Dodarts Arbeit für ungenügend, weil eine so kleine Luftsäule, wie die im Kehlkopf enthaltene, keine so tiefen Laute geben kann, wie sie der Mensch hervorbringt, und dieselbe Schwierigkeit Statt findet, wenn man die Stimmbänder mit vibrirenden Saiten vergleicht; desshalb dachte er sich das menschliche Stimmorgan zugleich als Blas- und als Saiteninstrument. Allein in seiner Denkschrift kommt kein Wort über die Schwingungen der Luft weiter vor, und es handelt sich nur immer um die Töne, welche die unteren Ligamente der Stimmritze hervorbringen, je nachdem sie mit den sie umgeben-

den Theilen in Verbindung stehen, oder der ganzen Länge nach frei und nur an ihren Enden mit dem Kehlkopfe verbunden sind. Es sind ihm daher die Stimmorgane nur Saiteninstrumente, bei welchen die von den Lungen ausgeathmete Luft als Streichbogen dient; auch sagt er nichts vom Nutzen der oberen Ligamente und der Taschen (ventriculi). Sein Hauptirrthum war, dass er meinte, die Tiefe der Töne rühre davon her, dass die Stimmbänder durch einen Luftstrom in Bewegung gesetzt werden.

Ungeachtet dieser Arbeit von Ferrein hat man doch noch immer die Stimmorgane mit Mundstücken verglichen, ja die Erfindung freier Mundstücke von Grénié hat dieser Erklärung in unseren Zeiten mehr Entwicklung und einen grösseren Schein von Wahrheit zu ertheilen gestattet, als es Dodart möglich war. Da entsteht nun die Frage, ob zwischen dem Stimmorgane und den freien Mundstücken eine völlige Analogie Statt finde?

Gegen diese Analogie spricht vorzüglich der Umstand, dass die Beschaffenheit der menschlichen Laute weit von den Tönen der vollkommensten Mundstücke abweicht und überhaupt durch kein Blasinstrument nachgeahmt werden kann. Nach der als richtig anerkannten Theorie und nach der Erfahrung ist es zur Erzeugung eines Tones durch ein Mundstück unerlässlich, dass das Züngelchen die Wände der Spalte, in der es sich bewegt, fast berühre, damit das Entweichen der Luft nur periodisch erfolge. Soll nun das Stimmorgan mit einem freien Mundstück verglichen werden können, so darf der Kehlkopf keinen Ton hören lassen, so lange die unteren Stimmbänder

von einander entfernt sind, und beim Singen müssten sie einander fast berühren, die in der Luftröhre verdichtete Luft müsste sich mit Gewalt einen Weg bahnen, indem sie selbe von einander entfernt, sie müssten sich einander wieder nähern, wenn die Spannkraft der Luft sie nicht mehr überwältigen kann, es müsste wieder eine neue Verdichtung eintreten u. s. f. Dabei würde es sehr viel Anstrengung kosten müssen, einen Ton hervorzubringen, weil die Schildgiessbeckenmuskeln (thyro-arythenoidei) sehr dick und kräftig sind, und nicht wohl einem sehr langsamen Luftstrome nachgeben, wenn sie sich einmal zusammengezogen haben, und doch weiss jeder, dass er einen Ton von sich geben kann, selbst wenn er den Athem zum Theil in sich hält; endlich sieht man nicht ein, wozu nach dieser Ansicht die Taschen, die oberen Bänder und die zwei Falten der schleimigen Häute dienen sollen, welche mit dem Kehldeckel eine kleine häutige Röhre ober der Stimmritze bilden.

Es ist wahr, dass man einen Laut erhält, wenn man von einem Kehlkopf alles bis auf die Schildgiessbeckenmuskel wegnimmt, sie bis zur Berührung einander nähert und dann durch die Luftröhre einen kräftigen Luftstrom einbläst; auch muss es so seyn, weil man so ein wahres Mundstück erzeugt. Wenn man aber, statt die Luft mit einem Blasbalge in die Luftröhre zu treiben, wie man es bisher gemacht hat, durch ein in die Luftröhre gestecktes Rohr zu blasen sucht, so findet man, dass man nur durch grosse Anstrengung zum Ziele gelangt, und dass die so erhaltenen Laute mit der menschlichen Stimme in keiner Beziehung stehen, sondern hoch sind und mit denen

der schreiendsten Mundstücke einerlei Charakter haben. Lässt man aber alle Theile des Kehlkopfes in ihrem natürlichen Zustande, nähert nur die Arytenoideen einander und bläst dann schwach in die Luftröhre, so erhält man viel angenehmere und der menschlichen Stimme ähnlichere Töne, und doch sind in diesem Falle die Schildgiessbeckenmuskel nicht gespannt, sondern lassen eine elliptische Oeffnung zwischen sich, deren grösserer Durchmesser 7 — 10 L., der kleinere aber 2 — 3 L. beträgt. Man kann daher nicht zugeben, dass die Stimmorgane Mundstücken ähnlich seyen, sondern man muss annehmen, dass die über den unteren Bändern des Kehlkopfes liegenden Theile eine bedeutende Rolle bei der Bildung der Laute spielen. Wir werden sehen, dass die Stimme wie in Flötenwerken hervorgebracht wird, und dass die kleine im Kehlkopfe und im Munde vorhandene Luftsäule vermög der Natur der elastischen Wände, welche sie einschliessen, und der Art, wie sie in Schwingungen geräth, Laute eigener Art erzeugen kann, die zugleich viel tiefer sind als es ihre Dimensionen zuzulassen scheinen. Zu diesem Behufe müssen wir aber mehrere bisher unbekannt gebliebene Thatsachen auseinander setzen.

2.

Es ist bekannt, dass in Orgelpfeifen, deren Länge ihren Durchmesser 12 — 15mal übertrifft, die Geschwindigkeit des die Schwingungen erregenden Luftstromes auf die Anzahl dieser Schwingungen nur einen geringen Einfluss hat, und dass man so den Ton nur mit Mühe um ein halbes Intervall erhöhen

kann, indem er gleich in die nächst höhere Octave überschlägt, wenn man zu viel Kraft anwendet: eben so erfolgt auf die Verminderung der Geschwindigkeit des den Schall erregenden Luftstromes nur eine Schwächung des Tones und eine kaum merkliche Vertiefung desselben. Aber in kurzen Pfeifen ist der Einfluss der Geschwindigkeit sehr gross, ja in kubischen Pfeifen kann man so den Ton vom Grundton bis zur Quint steigern, wiewohl es auch bei diesen einen Ton gibt, der am leichtesten anspricht, und der reinste und stärkste von allen ist.

Die Jäger brauchen zur Nachahmung der Stimme gewisser Vögel ein kleines Instrument, in welcher die Geschwindigkeit des Luftstromes eine noch grössere Rolle spielt. Es ist gewöhnlich von Bein, oft auch von Holz oder Metall, seine Gestalt ist verschieden, bald eine cylindrische Röhre von 8—9 L. Durchmesser und 4 L. Höhe, an beiden Enden mit einer ebenen dünnen Platte geschlossen, die in der Mitte mit einem 2 L. im Durchmesser haltenden Loche versehen ist (Fig. 2), oft ist es ein kleines halbkugelförmiges Gefäss mit ähnlichen einander gegenüber stehenden Löchern, wie Fig. 3 zeigt. Die Jäger nehmen dieses Instrument zwischen die Zähne und die Lippen, und indem sie die Luft mit grösserer oder geringerer Gewalt durch die beiden Oeffnungen treiben, erhalten sie verschiedene Töne. Man gelangt sicherer zu demselben Resultate, wenn man diesen kleinen Apparat mit einem cylindrischen Luftbehälter (Windlade) versieht, wie Fig. 4 zeigt, und kann dann Töne, die innerhalb zweier Octaven liegen, hervor bringen, ja wenn man recht des Luftstromes Meister geworden

ist, so scheint es, als gäbe es in der Tiefe der hervorbringbaren Töne keine andere Grenze, als welche in der Schwierigkeit, den Wind recht zu mässigen liegt; für höhere Töne scheint es gar keine bestimmte Grenze zu geben, denn es nimmt die Höhe derselben zu, sobald die Geschwindigkeit des Luftstromes wächst. Aber nicht alle diese Töne sind von einerlei Beschaffenheit, die tieferen sind dumpf und schwach, die höheren fast unerträglich schneidend, die zwischen beiden liegenden hingegen sehr intensiv, rein und hell. Es herrscht zwischen diesen Tönen und denjenigen, welche durch ein von seiner Ansatzröhre abgenommenes Mundstück hervorgebracht werden, eine grosse Aehnlichkeit, sowohl was den Charakter der Töne als auch die Möglichkeit betrifft, durch blosse Aenderung der Geschwindigkeit des Luftstromes alle Töne innerhalb $1\frac{1}{2}$ — 2 Octaven hervorzubringen, so dass es scheint, es liegen beiden ähnliche Ursachen zum Grunde. Man kann das Volumen dieses Instrumentes um das doppelte oder vierfache vergrössern oder verkleinern und seine Gestalt auf viele Arten abändern, ohne andere Resultate hervorzubringen als die genannten; nur tiefe Töne wird man desto leichter hervorbringen können, je grösser die Dimensionen sind; doch gibt es in jedem Instrumente einen Ton, der sich leichter als jeder andere hervorbringen lässt, und am intensivsten ist. Aendert man eine Dimension des Instrumentes, so ändert sich auch dieser Ton, und an einem Instrumente, bei dem man der Höhlung die jedem Ton angemessenste Grösse geben könnte, müssten alle Töne dieselbe Intensität bekommen. Bei übrigens gleichen Umstän-

den hat der Durchmesser der Oeffnung einen sehr merklichen Einfluss auf die Höhe und Tiefe der Töne und sie sind im Allgemeinen desto tiefer, je breiter die Oeffnung ist.

Diese Töne scheinen dadurch zu entstehen, dass der Luftstrom, welcher durch die beiden Oeffnungen zieht, die geringe im Bauche des Instruments enthaltene Luftmenge mit sich fort führt, ihre Ausdehnsamkeit vermindert und sie dadurch unfähig macht, dem äusseren Luftdrucke zu widerstehen, dieser wirkt auf sie, drückt sie zusammen, bis sie vermög ihrer eigenen Elasticität und durch den Einfluss des beständig fortdauernden Luftstromes wieder eine Verdünnung erleidet, auf welche eine neue Verdichtung folgt u. s. f. Erfolgt dieser Wechsel hinreichend schnell, so entstehen Luftwellen, die sich in die äussere Luft erstrecken und die Empfindung eines bestimmten Schalles erregen. Indess hat auch die Natur der Wände des Instrumentes einen Einfluss auf die Anzahl der Schwingungen und die Beschaffenheit des davon herrührenden Schalles; man bemerkt, dass die Wände stark mitschwingen, wenn sie dünn sind und dass die Töne dann grell und kreischend werden; ein Instrument von halbkugelförmiger Gestalt, bei welchem die ebene Wand von einem dünnen dehnbaren z. B. pergamentnen Plättchen gebildet wird, spricht leichter an und gibt im Allgemeinen tiefere, völlere und angenehmere Töne, als wenn diese Wand aus einer starren Substanz besteht. Uebrigens hängt die Beschaffenheit des Tones endlich auch noch von der Richtung der Wände der Oeffnungen ab. Stehen sie schief gegen Innen, wie in Fig. 5, so sind die Tö-

ne tiefer und minder ausgiebig; es scheint, als wirke der Rand der Oeffnung, gegen den der Luftstrom hinfährt, so wie die Lefze an einer Orgelpfeife, man kann ihn sehr dick und abgerundet machen, ohne im Tone eine merkliche Aenderung dadurch hervorzubringen, gerade wie bei Orgelpfeifen, wo man auch die Lefzen nicht schneidend scharf zu machen braucht, wo sie 1 — 3 L. dick seyn können, ohne dass der Ton eine Aenderung erleidet.

3.

Man glaubt allgemein, bei einer Orgelpfeife habe das Material derselben keinen Einfluss auf die Höhe des Tones. Dieser Meinung entspricht die Erfahrung wohl bei sehr langen Pfeifen mit festen widerstehenden Wänden, aber bei kurzen ist sie falsch, ja die Natur der Lefzen kann selbst bei langen Pfeifen auf den Ton grossen Einfluss nehmen. Nimmt man bei einer etwa 2 F. langen und 2 Z. breiten Pfeife statt des festen Plättchens, welches die Lefzen bildet, ein elastisches von Tuch oder Pergament, das man nach Belieben spannen kann, so ändert sich der Ton um eine Quart, selbst um eine Quint, wenn man die Spannung mehr und mehr verstärkt und zugleich die Geschwindigkeit des Luftstromes vergrössert. Bei kürzeren Pfeifen vereinigt sich der noch grössere Einfluss der Geschwindigkeit des Luftstromes mit dem der Spannung und es geht daraus eine noch grössere Wirkung hervor; daher kommt es, dass sich der Ton einer kubischen Pfeife leicht um eine Octave vertiefen lässt, wenn die Wände einer sehr verschiedenen Spannung fähig sind; können gar die Wände der

Pfeife die Schwingungen der darin enthaltenen Luft begleiten und kann zugleich ihre Spannung abgeändert werden, so ist ihr Einfluss auf die Anzahl dieser Schwingungen so gross, dass es scheint, als könne man den Ton ohne Ende vertiefen. Ueberzieht man quadratförmige Rahmen mit Papier oder Pergament, und verbindet sie zu einer kubischen Pfeife, so gibt diese bei einer grossen Spannung der Wände fast einen so hohen Ton, als bestände sie aus einer ganz starren Substanz. Vermindert man die Spannung der Wände durch Benetzen mit Wasser, so wird der Ton desto tiefer, je mehr die Spannung nachlässt und man kann ihn so um mehr als zwei Octaven vertiefen, ohne ihn unhörbar zu machen, aber er wird immer schwächer, so wie er tiefer wird. Zur Nachtszeit, wo es ruhig ist, findet man fast keine Grenze in der Vertiefung. Man kann sich mittelst Sand vom Mitschwingen der Wände versichern; dieser zeigt gewöhnlich auf jeder Wand eine elliptische oder kreisförmige Knotenlinie von veränderlichem Durchmesser, auch bemerkt man, dass die obere und untere Wand am meisten mitschwingt und den grössten Einfluss auf die Vertiefung des Tones hat.

Kurze, an beiden Seiten offene Pfeifen geben viele von einander verschiedene Töne, selbst wenn die Wände nur zum Theile aus einem häutigen Stoffe bestehen. So kann z. B. eine 9 Zoll lange Pfeife mit quadratförmiger Basis von 18 L. Seite, die eigentlich den Ton d_4 geben sollte, wenn die der Mündung nächste Hälfte der Wände aus einem häutigen, dünnen, gespannten Körper besteht, viel tiefere Töne geben, nämlich die zwischen c_3 und c_4 liegen-

den und selbst einige von denen, welche innerhalb c_2 und c_3 enthalten sind.

Die Töne der Pfeifen mit häutigen Wänden haben zum Theile etwas vom Tone der Flötenpfeifen, und etwas von freien Mundstücken an sich; man darf sich keineswegs wundern, dass er sich mit einem Tone eines bekannten Instrumentes nicht vergleichen lässt, denn unsere musikalischen Instrumente haben keine diesen ähnliche Pfeifen, sie sind in gewissem Sinne das umgekehrte der Saiteninstrumente, denn bei diesen wird die im Resonanzkasten befindliche Luft durch die festen Wände desselben in Bewegung gesetzt, während in Pfeifen mit häutigen Wänden die Luft ihre Bewegung den Wänden mittheilt.

4.

Ich habe in einer früheren Arbeit gezeigt, dass man, um eine Luftmasse in Schwingungen zu versetzen, nur in irgend einem Puncte derselben einen Schall unmittelbar zu erregen braucht. So wird in den Orgelpfeifen der Ton anfänglich nur in der Mündung erregt, unabhängig von den Vibrationen der Luftsäule, so dass das von einer Pfeife getrennte Mundstück denselben Ton gibt, wie die daran gesetzte Röhre. Diese Luftschwingungen gehen vom Orte, wo sie erregt wurden, aus, um sich in der ganzen Luftmasse fortzupflanzen, und diese regulirt die Bewegung so, dass daraus volle und angenehme Töne hervorgehen. Eben so geräth die Luft an der Mündung eines Gefässes durch den Einfluss einer daselbst befindlichen Platte aus Glas oder Metall, oder einer Stimmgabel

in Schwingungen, und kann sehr intensive Töne geben. So oft man daher am Ende einer Luftsäule durch irgend ein Mittel einen Schall erregt, geräth sie selbst in Schwingungen, wenn nur ihre Dimensionen der Länge der unmittelbar erzeugten Welle entsprechen. Befestigt man einen Blasbalg an der convexen Seite eines hemisphärischen Instrumentes, wie das vorher besprochene war, und bringt an der ebenen Seite eine Röhre (Fig. 6) an, so muss dieser Apparat einen Ton geben, wie ihn die in der Röhre eingeschlossene Luftsäule von sich gibt, vorausgesetzt, dass unter den Tönen, die das kleine Instrument für sich gibt, einer vorkommt, den die Luftsäule geben kann. Dieses zeigt die Erfahrung wirklich. Es vertritt daher das kleine Instrument die Stelle der Lefzen bei den Orgelpfeifen. Man kann es auch ohne Aenderung des Effectes wie Fig. 7 und 8 machen.

Die so erhaltenen Töne unterscheiden sich von denen der gewöhnlichen Orgelpfeifen, sie können sehr intensiv und hell werden, wenigstens wenn der Apparat aus Metall besteht, und die Luftsäule die rechten Dimensionen hat; denn da sich die ursprünglichen Luftschwingungen nur auf einen sehr kleinen Raum beschränken, so werden sie für Luftsäulen von etwas bedeutendem Durchmesser unzureichend.

Dieses Instrument kann, wie eine beiderseits offene Orgelpfeife, nur Töne geben, welche in die Reihe c_1, c_2, g_2, e_3, g_3, etc. gehören, dessungeachtet kann es sich treffen, dass das kleine Gefäss, unabhängig von der Luftsäule schwingt, dann sind aber die Töne schwach und unrein.

Aus dem Vorhergehenden ist klar, dass man an

einer so eingerichteten Pfeife mit Wänden, die verschiedene Grade der Spannung erleiden, alle Töne hervorbringen kann, welche innerhalb gewisser Grenzen liegen, die von der Spannung der Wände und vom Volumen der Luft abhängen, und obwohl letzteres klein ist, so kann es doch die Bewegung so einrichten, dass tiefere Töne erzeugt werden, als sonst die durch widerstehende Wände eingeschlossene Luft geben könnte.

Hat die Röhre, welche die schallende Luft enthält, Seitenlöcher, so beobachtet man, dass ein durch einen Blasbalg erregter gleichförmiger Luftstrom Töne erzeugt, die sich ändern, wenn man die Löcher schliesst, welche vorhin offen waren und umgekehrt, so dass es vielleicht nicht unmöglich wäre, auf diese Art ein musikalisches Instrument zu bauen.

5.

Der Grundton einer einerseits geschlossenen Pfeife von durchaus gleichem Durchmesser ist im Allgemeinen um eine Octave tiefer, als der einer beiderseits offenen Pfeife. Dieses ist aber bei Pfeifen von ungleichem Durchmesser z. B. bei kegelförmigen, pyramidalen nicht der Fall, wenn man sie an ihrer engeren Seite anbläst. Das Intervall zwischen dem Ton, den eine solche ganz offene Pfeife gibt und den, welchen eine einerseits geschlossene hören lässt, ist für dieselbe Länge desto gröser, je bedeutender der Neigungswinkel der Wände ist. So gibt z. B. eine conische beiderseits offene Pfeife von $4\frac{1}{2}$ Z. Länge, deren kleinster Durchmesser 6 L., deren grösster 2 Z. beträgt, den Ton c_5, ist sie aber auf einer Seite geschlossen,

den Ton e_3. Wenn der Durchmesser der grössten Oeffnung bedeutender, noch mehr aber, wenn der der kleinsten minder ist, während die übrigen Dimensionen dieselben sind, so kann der Ton noch um mehr als 2 Octaven tiefer werden.

6.

Es ist unmöglich, den Hergang der Sache bei der Bildung der menschlichen Stimme zu begreifen, ohne die innere Form des Kehlkopfes zu kennen. Um sich diese Kenntniss zu erwerben, giesse man in dieses Organ eine Substanz, die hart wird, wie Gips, und einen festen Kern gibt, der dessen innere Gestalt getreu darstellt. Fig. 9 stellt diesen Kern, der auf solche Art erhalten wurde, in natürlicher Grösse vor. *AA'* sind die Taschen, die eine eigenthümliche Form haben und ziemlich ausgedehnt sind; manchmal reichen sie noch weiter hinauf, und als in dieser Figur, und ihr oberster Theil berührt die fettigen Körper der Basis des Stimmritzendeckels. Ich sah zwei Individuen, bei denen sie 2 Zoll vom Grund bis zum höchsten Puncte massen, gewöhnlich haben sie aber 5—6 L. Höhe. Im Raume *BB'* befinden sich die Sprachbänder und Schildgiessbeckenmuskel, und den Raum *CC'* nehmen die oberen Bänder ein. Fig. 10 stellt denselben Körper von einer anderen Seite vor. Diese zeigt besser als die vorige die Ausdehnung der Falten der schleimigen Membrane, welche sich vom Stimmritzendeckel bis zum entsprechenden Giessbecken erstreckt. Diese Falte nimmt den Raum *ABB'* ein, und endiget sich ober der Linie *AC*. Fig. 11 stellt einen Schnitt des Kernes nach der Linie *LM* vor,

welche das Organ in zwei Theile, in den vorderen und hinteren theilt. Diese Figur gibt eine richtige Vorstellung von der inneren Gestalt des Kehlkopfes und zeigt, dass zwischen ihm und der Fig. 8 eine grosse Aehnlichkeit Statt findet.

7.

Nach diesem ist es leicht, sich von der Bildung der Stimme Rechenschaft zu geben, indem man das Stimmorgan, welches aus dem Kehlkopf, dem Schlunde und Munde besteht, wie eine conische Röhre betrachtet, in welcher die Luft wie in den Flötenwerken der Orgeln schwingen kann. Diese Röhre hat alle nöthigen Eigenschaften, vermög welcher die darin enthaltene Luft, ungeachtet ihres geringen Rauminhaltes eine grosse Anzahl, mitunter auch sehr tiefer Töne geben kann, ihr unterer Theil ist von elastischen Wänden gebildet, die eine sehr verschiedene Spannung annehmen können, während der Mund, indem er sich mehr oder weniger öffnet und dadurch die Dimensionen der Luftsäule abändert, einen bedeutenden Einfluss auf die Anzahl der Schwingungen ausübet; dazu kommt noch, dass die Lippen, indem sie sich einander nähern, oder sich von einander entfernen, die Sprachröhre bald in eine offene, bald in eine fast geschlossene Röhre umwandeln.

Es ist bemerkenswerth, dass der Ton einer conischen nur wenig abgestumpften Röhre von beinahe gleicher Capacität mit dem Sprachorgane und derselben Länge, nämlich $4\frac{1}{2}$ Z., nur wenig vertieft werden darf, um einer derjenigen zu seyn, den auch der Mensch hervorbringen kann, eine ähnliche, beiderseits

offene Röhre gibt den Ton c_5, und viele Menschen können in der Höhe des Tones a_4 erreichen, der nur um eine kleine Terz tiefer ist. Schliesst man die Basis dieser Röhre grösstentheils, so vertieft sich dadurch der Ton leicht bis c_4 und darüber, man braucht ihn daher nur noch etwa um eine Octave tiefer zu machen, um Töne hervorzubringen, wie die tiefsten der menschlichen Stimme sind. Wenn man aber bedenkt, dass die im Sprachorgane enthaltene Luftsäule, besonders unten, von dehnbaren Wänden umgeben ist, die also selbst schwingen und auf die Bewegung der Luft Einfluss haben, indem sie daran Theil nehmen, so begreift man, dass die Vertiefung um eine Octav leicht Statt haben kann. Construirt man eine pyramidale Röhre von beinahe gleicher Capacität und Länge mit der Stimmröhre, deren untere Wand in dem der engeren Oeffnung zugekehrten Drittel, der Länge nach, von einer häutigen Substanz gebildet ist, so kann man damit alle Töne der menschlichen Stimme hervorbringen, indem man theils die Spannung der Membrane abändert, theils die grössere Oeffnung mehr oder weniger schliesst, jedoch so, dass sie nie ganz geschlossen ist. Der einzige bemerkungswerthe Unterschied zwischen einer Pfeife mit häutigen Wänden und der Stimmröhre liegt in der Art des Ansprechens, die für letztere der dem Instrumente Fig. 8 eigenen ähnlich ist. Die Luftröhre *TT'* (Fig. 11) endiget sich oben in eine Spalte, die mehr oder weniger gerade werden kann, durch gegenseitige Näherung der Giessbecken und durch Contraction der Schildgiessbeckenmuskel, *BB'*. Diese Oeffnung spielt offenbar die Rolle, wie das Windloch der auf einer Seite geschlossenen Orgel-

pfeifen. Der Luftstrom, welcher aus ihr kommt, geht durch den Raum zwischen den Taschen, und bricht sich an den oberen Bändern, die wiewohl sie abgerundet sind, doch nicht die Function der Lefzen an Orgelpfeifen verrichten können, daher geräth die Luft in den Taschen in Vibration und gibt einen Ton, der für sich ohne Zweifel sehr schwach wäre, aber an Intensität gewinnt, weil sich die Wellen, die von den zwischen den oberen Bändern befindlichen Zwischenräumen ausgehen, in der oberhalb liegenden Stimmröhre fortpflanzen und dort die Schwingungen dahin abändern, dass sie denen in kurzen und zum Theile aus häutigen Substanzen gebildeten Röhren ähnlich sind.

Damit aber der so hervorgebrachte Schall alle ihn charakterisirenden Eigenschaften erlangt, muss die Spannung des dehnbaren Theils der Wände der Stimmröhre sowohl mit der der Taschen, als auch mit der der oberen und unteren Bänder im gehörigen Verhältnisse stehen, und die Grösse der Oeffnung, durch welche die Luft streicht, muss sich auch auf eine entsprechende Art ändern, um den besten Effect hervorzubringen. Desshalb hat die Natur alle Theile mit einem elastischen und muskulösen Ueberzug versehen. Der Schildgiessbeckenmuskel bildet die inneren und äusseren Wände der Taschen, trägt aber nichts zur Bildung des oberen Bandes bei*). Die oberen Bänder haben keine eigenen Muskel, aber sie sind von

*) Die wenn auch sehr genaue Beschreibung des thyro-arytenoideus, welche der Verfaseer hier folgen lässt, bleibt weg, weil sie für physikalische Leser kaum das gehörige Interesse haben dürfte.

einer sehr festen Substanz gebildet, und dick genug, um jedes fremden Beistandes entbehren zu können; wiewohl ihr freier Rand abgerundet ist, so kann dieses doch, wie oben bemerkt wurde, der Erzeugung des Schalles nicht hinderlich seyn.

Die merkwürdigste Einrichtung des menschlichen Stimmapparates besteht darin, dass sich der Kehlkopf nach oben in zwei Falten von schleimigen Häuten endiget, die mitten in der schwingenden Luft hängen, und nothwendig die Schwingungen mit ihr theilen müssen. Es ist kein Zweifel, dass diese zwei Falten auf die Modulation und Articulation der Stimme, so wie auf ihren Charakter einen grossen Einfluss haben; denn der untere Kehlkopf derjenigen Vögel, welche einen sehr abwechselnden Gesang haben und reden lernen können, hat eine ähnliche Einrichtung, während man bei Vögeln, deren Stimme sehr beschränkt ist, selbst wenn ihr Kehlkopf ganz eigene Muskeln hat, nichts dergleichen bemerket. Da diese schwebenden Membranen einer verschiedenen Spannung fähig sind, so muss ihr vorzüglichster Nutzen darin bestehen, bald plötzlich, bald stufenweise die Anzahl der Luftschwingungen abzuändern. Wenn sie gespannt sind, vermindert sich ihre Höhe, und die Töne müssen höher werden, weil die die Luft einschliessenden Wände mehr Widerstand leisten und der dehnbare Theil derselben eine geringere Ausdehnung hat. Es ist zu bemerken, dass gleichzeitig mit dieser Wirkung die Oeffnung, durch welche die Luft aus der Luftröhre entweicht, gerade wird, und die äusseren Wände der Taschen eine grössere Steifheit bekommen, denn derselbe Muskel bewirkt alle diese Bewegungen. Es ver-

steht sich, dass die entgegengesetzte Wirkung eintritt, und die Töne tiefer werden, wenn die Falten an Spannung verlieren. Nach dieser Erklärung der Stimmorgane ist es klar, dass man der Stimme an ihrem Umfange nichts benimmt, sondern die tiefern Töne nur schwächer macht, wenn man die oberen Theile der Stimmröhre wegnimmt und nur die blossen Taschen übrig lässt.

Daraus erklärt es sich auch, dass man ähnliche Sectionen an lebenden Thieren vornehmen könnte, ohne ihnen die Fähigkeit, verschiedene Töne hervorzubringen, zu benehmen. Da die Luft in den Taschen unabhängig von der in der Luftröhre schwingen kann, so ist es sehr wahrscheinlich, dass gewisse Laute durch die Taschen allein hervorgebracht werden können, besonders solche, die der Schmerz auspresst, vielleicht auch die sogenannten Fisteltöne. Es scheint, es müsse dieses in jedem Falle Statt finden, wo die dehnbaren Theile der Stimmorgane nicht den Grad der Spannung annehmen können, der dem hervorzubringenden Ton entspricht. Dieses ist um so wahrscheinlicher, als es Thiere gibt, deren Stimmorgane nur aus Taschen bestehen, wie z. B. Frösche. Der Kehlkopf dieser Thiere gleicht sehr stark einer kleinen Pauke; die convexe Wand derselben ist knorpelig, nimmt den oberen Platz ein, und hat eine länglichte Mündung, die sich nach Belieben öffnen kann, die untere Wand ist häutig und zeigt eine ähnliche Oeffnung. Die Luft langt unter dieser Haut an, geht durch beide Oeffnungen und setzt die in der Höhlung befindliche Luft in Bewegung. Der Mechanismus gleicht den abgebildeten Instrumenten und den Taschen bei Menschen. Hätte das Thier

nebst diesem Organ ein conplicirteres Respirationssystem, so könnte es ungeachtet der so grossen Einfachheit des ersteren doch angenehme Laute hervorbringen.

Die Thatsachen, auf welche sich diese Erklärung der menschlichen Stimme gründet, können auch angewendet werden, um die Laute zu erklären, welche verschiedene Säugethiere von sich geben, deren Organe denen des Menschen ähnlich sind. Bei denen, welche knöcherne, mit den Taschen des Kehlkopfes verbundene Säcke haben, wie die Brülaffen, begreift man leicht, wie es kommt, dass die Luft, welche die Höhlungen enthalten, so tiefe Töne und so starke Laute erzeugen kann. Thiere, bei denen diese Säcke häutig sind, wie bei vielen Affen, müssen demnach starke, dumpfe und sehr tiefe Töne von sich geben können. Ich zeige diese Anwendungen nur an, und beschränke mich auf die Bemerkung, dass die sonderbarsten Einrichtungen der Stimmorgane verschiedener Thiere wahrscheinlich nach den hier angeführten Grundsätzen erklärt werden können.

III. Ueber das Wiederkennbarmachen der Inschriften auf Münzen und Medaillen von Brewster.

(The Edinburgh Journal of Science vol. 1.)

Man weiss seit langer Zeit, dass man an einer Münze, von welcher die Inschriften und Zeichnungen so verschwunden sind, dass man keine Spur eines Gepräges mehr an ihr erkennen kann, sowohl

die Inschriften als auch die Zeichnungen zum Theil oder gänzlich erkennbar machen kann, wenn man sie auf heisses Eisen legt. Thut man dieses mit einer abgeriebenen Münze, so sieht man, dass sich über die ganze Oberfläche eine Oxydation erstreckt und dass das Oxydhäutchen seine Farbe mit der Dauer und Intensität der Hitze ändert. Die Theile, wo sich Buchstaben befinden, oxydiren sich in einem anderem Grade, als die sie umgebenden so, dass die Buchstaben durch das Oxydhäutchen lesbar werden. Die Farben, welche die Zeichnung decken, sind oft sehr brillant, grün, bronzfarben und manchmal auch ins Dunkle spielend. Manchmal haftet die Farbe, welche die Zeichnung deckt so schwach, dass man sie durch leichtes Reiben mit dem Finger wegschaffen kann.

Wenn man den Versuch mit derselben Münze öfter wiederhohlt, und nach jedem Experimente das Oxyd wegschafft, so wird das Häutchen immer schwächer und endlich ganz unmerkbar; sie erlangt aber die vorige Eigenschaft wieder mit der Zeit.

Wenn man die Münze das erstemal auf heisses Eisen legt, wo die Oxydation am stärksten ist, steigt ein Dampf davon auf und verändert sich, so wie das Oxydhäutchen, bei öfterer Wiederhohlung des Versuches. Eine Münze, welche diesen Dampf nicht mehr von sich gibt, dampft wieder, nachdem sie etwa 12 Stunden der Luft ausgesetzt worden ist.

Bei einer grossen Anzahl von Versuchen fand ich, dass sich der erhabene Theil einer Münze, und bei neuen Münzen der erhabene Rand rings um die Inschrift zuerst oxydirt. So bekommt an einem engli-

chen Schillingstück von 1816 der Rand ein helles Gelb, bevor sich an den anderen Theilen eine Spur davon zeigt.

Bei der Untersuchung einer grossen Anzahl alter Münzen zeigte sich an einem oder an zwei Puncten derselben ein glänzend rothes Kügelchen, von Schwefelgeruch begleitet; manchmal schwitzten gar kleine Kügelchen, wie Quecksilberkügelchen, von der Oberfläche aus, andere hauchten einen unerträglichen Geruch aus und eine indische Pagode wurde ganz blass, als ich sie auf heisses Eisen legte.

Diese sind die allgemeinen Thatsachen in Betreff der Oxydation der Münzen, deren Erklärung gewiss interessant ist.

Nimmt man ein homogenes glattes Stück Silber und legt es auf heisses Eisen, so wird seine Oberfläche gleichförmig oxydirt, wenn alle Theile einer gleichen Hitze ausgesetzt sind. Eine Münze unterscheidet sich aber von einem Silberstück von gleichförmigem Gefüge darin, dass sie während des Ausmünzens einen grossen Druck erlitt, wobei die vertieften Theile durch die Erhabenheiten des Stempels am meisten, die erhabenen Theile hingegen am wenigsten zusammengedrückt wurden. Es haben daher in einem Münzstück die Buchstaben und Figuren eine geringere Dichte als die anderen Theile, und oxydiren sich desshalb schneller und bei einer geringeren Temperatur als diese. Wenn auch die Erhabenheiten durch den Gebrauch abgenützt sind, so haben auch noch die unter ihnen befindlichen Theile eine geringere Dichte als das sie umgebende Metall, und nehmen daher in der Hitze einen anderen Oxydationsgrad und

eine andere Farbe an, als die sie umgebende Oberfläche. Daraus ersieht man, warum die abgenützten Buchstaben durch Oxydation wieder kennbar gemacht werden.

Eine ähnliche Wirkung findet bei der schönen Oxydation Statt, welche auf der Oberfläche des polirten Stahles hervorgebracht wird. Hat er harte Stellen, so hört in ihrer Nähe die Gleichförmigkeit der Farbe auf, und sie erscheinen immer anders gefärbt als die übrige Masse. Das Dampfen und die Verminderung der Oxydationsfähigkeit einer Münze bei der Wiederhohlung des Versuches scheint anzuzeigen, dass die weicheren Theile des Metalls etwas von der Luft einsaugen, das ihre Oxydation befördert. Ob dieses Oxygen sey oder nicht, bleibt zu bestimmen übrig.

IV. Ein sehr einfaches Instrument, um zu erkennen, ob ein Körper das Licht doppelt bricht oder nicht, von A. Baumgartner.

Die Eigenschaft der Körper, das Licht doppelt zu brechen, steht mit der Anordnung und nicht selten mit der Natur ihrer kleinsten Theile in so naher Verbindung, dass man oft von ihrem Daseyn auf die materielle Beschaffenheit der Körper schnell einen Schluss ziehen kann, zu dem man sonst nur mittelst mehrerer mühsam zu entdeckender Eigenschaften hätte gelangen können. So z. B. weiss man mit völliger Bestimmtheit, dass ein Stück eines Krystalls, welches das

Licht doppelt bricht, nicht in das sogenannte tessularische System gehöre, es mag durch Kunst oder Zufall in was immer für eine Form gebracht seyn, an der man nicht das mindeste ihrer ursprünglichen krystallinischen Structur mehr zu erkennen im Stande ist.

Bekanntlich würde ein Polarisationsinstrument am schnellsten zu dieser Kenntniss führen, allein die gewöhnlichen Instrumente dieser Art sind theils zu kostbar, theils auch zu voluminös, um sie zur Bestimmung der Einwirkung eines kleinen Körpers auf das Licht leicht und mit Bequemlichkeit brauchen oder sie den gewöhnlichen oryctognostischen Apparaten einverleiben zu können. Darum construirte ich das kleine und gar nicht kostspielige, Fig. 12 abgebildete Instrument, welches sehr leicht und schnell zum Ziele führt.

AB ist eine Röhre mit einer nach unten angebrachten Erweiterung, die als Fussgestell dient; darin befindet sich ein geschwärzter ebener Glasspiegel *C*, der gegen die Axe der Röhre unter 65° 35′ geneigt ist. An der Seite der Röhre ist eine kleine Oeffnung *D* anbracht, welche mit einem Turmalinplättchen verschlossen ist, das parallel mit der Axe eines reinen Turmalinkrystalles geschnitten ist, und eine solche Stellung hat, dass ein Lichtstrahl, der durch dasselbe geht und auf den Planspiegel fällt, von diesem nicht reflectirt, sondern absorbirt wird. In *E* ist obengenannte Röhre mit einer Sammellinse geschlossen, deren Brennweite grösser ist, als die Entfernung desjenigen Punctes des Spiegels von ihr, den ein senkrecht durch das Turmalinplättchen gehender Strahl trifft. Endlich ist seitwärts an der Röhre in gleicher Höhe mit dem Turmalinplättchen eine Oeffnung *F* angebracht.

Stellt man dieses Instrument so, dass das Turmalinplättchen einem Fenster oder einem anderen Körper gegenüber steht, der eine sattsame Beleuchtung gewährt, so wird man durch die Linse die Oeffnung, an der das Krystallplättchen angebracht ist, entweder gar nicht, oder nur sehr schwach im Spiegel wahrnehmen. Hält man nun einen Körper, dessen Wirkung auf das Licht man untersuchen will, mittelst einer kleinen Zange durch die Oeffnung *F* so in die Röhre, dass der Lichtstrahl, welcher das Krystallplättchen verlassen hat, erst durch ihn gehen muss, um den Spiegel treffen zu können, so wird die Oeffnung *D* eben so schwach mittelst der Linse gesehen werden, wie ohne den Körper oder gar noch schwächer, wenn dieser Körper, das Licht einfach bricht, hingegen wird diese Oeffnung viel heller erscheinen, wenn er die Eigenschaft besitzt, das Licht doppelt zu brechen. Um allem Irrthum vorzubeugen, muss man den zu prüfenden Körper, während er sich im Instrumente befindet, nach mehreren Richtungen drehen und wenden, und bei jeder Stellung desselben gegen den Spiegel beobachten, ob die Oeffnung heller erscheint oder nicht. Besonders ist dieses bei Körpern nöthig, die in abgerundeten Körnern vorkommen, wie dieses häufig bei sehr harten Krystallen der Fall ist; denn diese wirken nach einer Richtung wie eine Sammellinse und gewähren selbst bei einer einfachen Brechung des Lichtes eine kleine Vermehrung der Lichtstärke, nach anderen Richtungen zeigen sie dieses aber nicht, wie es doch der Fall seyn müsste, wenn sie das Licht doppelt zu brechen im Stande wären.

Bei vielen Krystallen ist man mittelst dieses Instrumentes auch im Stande, die Lage der Axe der doppelten Brechung des zu untersuchenden Körpers anzugeben: denn bei der Lage desselben, wo sich im Spiegel farbige ovale Ringe zeigen, ist immer die Axe der doppelten Brechung nur wenig gegen den Lichtstrahl geneigt, welcher durch den Krystall geht, und wenn diese Farbenringe gar kreisförmig sind, so kann man gewiss seyn, dass die Axe der doppelten Brechung eine zu dem einfallenden Strahl parallele Lage habe.

Es ist kaum nöthig anzuführen, dass dieses Instrument bei der Bestimmung mancher Edelsteine zur schnellen Entscheidung führen kann. So z. B. ist es oft schwer, den Saphir von einem farbigen Diamante zu unterscheiden, indem die Härtegrade beider nicht sehr von einander verschieden sind, und sich auch, besonders wenn das Stück klein ist, nur bei einem sehr genauen Verfahren ein Unterschied im specifischen Gewichte zeigt. Da aber der Diamant das Licht einfach, der Saphir hingegen doppelt bricht, so wird man auf einen Blick beide von einander durch ihre Wirkung auf das Licht unterscheiden können. Eben so erkennt man mittelst dieses Verhaltens augenblicklich die künstlichen Glasflüsse, deren manche einen sehr vollkommenen Glanz haben und ihrer netten Form wegen oft nicht gestatten, die Härteprobe anzuwenden, dass man versucht wird, sie für Edelsteine zu halten. Allein da das Glas nur in grösserer Masse durch schnelles Abkühlen die Eigenschaft erlangt, das Licht doppelt zu brechen, und grosse Glasstücke wohl nur von ganz Unwissenden für Edelsteine ge-

halten werden können; so ist man leicht im Stande, sie von allen denen zu unterscheiden, welche das Licht doppelt brechen, und diese machen bekanntlich bei weitem die Mehrzahl aus.

V. Neue Correctionen für die Wirkung der Feuchtigkeit in der Formel zum Behufe der Höhenmessung mittelst des Barometers von Adam Anderson, Rector der Akademie zu Perth.

(Edinburgh. Philosoph. Journal. Nr. 24 u. 26.)

Die Höhenmessungen mittelst des Barometers haben vor dem Nivelliren und der geometrischen Messung bei weitem den Vorzug. Es ist nur zu bedauern, dass man ungeachtet der vielen und feinen Correctionen, die man in der Formel anbrachte, mittelst der man die Höhe aus dem Barometerstande ableitet, bei verschiedenen Zuständen der Atmosphäre nicht zu demselben Resultate gelangt. Dieses kann man der Vernachlässigung eines wichtigen Elementes bei der Berechnung zuschreiben, nämlich der Feuchtigkeit der Luft. Man hat bis jetzt diese gar nicht geachtet, oder ihren Einfluss auf eine so allgemeine und unbestimmte Art in Rechnung gebracht, dass sie nicht auf Fälle anwendbar ist, wo der Feuchtigkeitszustand sich stark vom mittlern entfernet. Der neue Coefficient, den ich an der gewöhnlichen Höhenformel anbringe, wird gewiss manches aufklären, das bisher keine zureichende Erklärung fand, und alle von der Feuchtigkeit her-

rührenden Quellen der Irrthümer der barometrischen Höhenmessung beseitigen.

Correctionen für die Höhenformel.

Nimmt man die Luft als vollkommen elastisch, und von gleicher Temperatur durch ihre ganze Masse an, und drückt die Länge der Quecksilbersäule im Barometer an der untern und obern Station durch b und β aus, so wird der Höhenunterschied beider Stationen durch die Formel

$$h = m \log. \left(\frac{b}{\beta}\right)$$

ausgedrückt, wo m ein beständiger Coefficient ist, der durch einen Versuch oder mittelst des Verhältnisses zwischen dem specifischen Gewichte der Luft und des Quecksilbers bestimmt wird. Dieser in seiner Form so einfache, in seiner Anwendung so leichte Ausdruck muss zwei Correctionen bekommen, wegen der Abnahme der Temperatur nach oben; die eine bezieht sich auf die Länge der Quecksilbersäule, die in beiden Stationen auf einerlei Temperatur reducirt werden muss, die andere aber auf den Coefficienten m, welcher nach Verhältniss der Ausdehnung und Zusammenziehung der Luftsäule durch die Hitze oder Kälte dahin abgeändert werden muss, dass er für die wirkliche Temperatur passet, die höher oder tiefer ist, als jene, bei der m ursprünglich bestimmt wurde.

Die Länge der Quecksilbersäule in beiden Stationen muss in diejenige verwandelt werden, welche in der Voraussetzung einer gleichen Temperatur Statt finden würde, indem man die Länge der oberen auf

die Temperatur der unteren oder umgekehrt, oder gar beide auf eine gemeinschaftliche von der ursprünglichen beider verschiedene Temperatur reducirt. Uebrigens ist es einerlei, auf welche Temperatur man beide Quecksilbersäulen reduciren mag. Nimmt man die Temperatur der unteren Station als diejenige an, auf welche die Quecksilbersäule in der oberen reducirt wird, so wird aus obigem Ausdruck

$$h = m\log\left(\frac{b}{q\beta}\right).$$

wo q bloss vom Unterschiede der Temperatur des Quecksilbers in beiden Stationen, mithin von der Ausdehnung des Quecksilbers durch die Wärme abhängt. Ist T die Temperatur des Quecksilbers im Barometer der unteren Station, T′ dieselbe in der oberen, beide nach Fahrenheit, so ist

$$q = 1 + 0{,}000102\,(T - T').^{*)}$$

*) Bei dem Verfahren, das der Herr Verfasser anwendet, indem er die Queksilbersäule der oberen Station auf die Temperatur der Quecksilbersäule der unteren reducirt, begeht man einen kleinen Fehler, weil dem Ausdehnungs-Coefficienten 0,000102 als Einheit das Volumen bei der Temperatur des Aufthauungspunctes entspricht, nicht aber das bei der Temperatur T. Dass jedoch dieser Fehler nicht gross sey, ersieht man daraus, wenn man die Temperaturen beider Quecksilbersäulen auf 32° F reducirt. Ist nun q′ der Correctionsfactor für b, q″ derjenige für β, so hat man eigentlich

$$h = m\log\left(\frac{q'b}{q''\beta}\right) = m\log\frac{b}{q\beta}$$

wenn man $\frac{q''}{q'} = q$ setzt.

Es ist aber $q' = 1 - 0.000102\,(T - 32)$ und

$$q'' = 1 - 0.000102\,(T' - 32)$$

$$q = \frac{q''}{q'} = \frac{1 - 0.000102(T' - 32)}{1 - 0.000102(T - 32)}$$

$$= 1 + 0.000102(T - T') + (0.000102)^2(T - T')(T - 32)\text{etc.}$$

Die andere oben erwähnte Correction hängt von der Ausdehnung oder Zusammenziehung der Luft ab, die, je nachdem sich die Temperatur über oder unter der Normaltemperatur befindet, auf welche sich der Coefficient m bezieht, obige Formel auf

$$h = mr\log\left(\frac{b}{\beta\beta}\right)$$

bringt, wobei der Coefficient r so genommen werden muss, wie es die Ausdehnung der Luft mit dem gewöhnlichen Antheil von Dünsten verlangt. Aber die Dunstmenge, welche der Luft in verschiedenen Schichten beigemischt ist, ist zu verschiedenen Zeiten, und in verschiedenen Schichten sehr verschieden, es muss daher auch die Abweichung des Feuchtigkeitszustandes von dem, wo r bestimmt wurde, eine entsprechende Abweichung in der Höhendifferenz h hervorbringen. Sir Shuckburgh und General Roy haben gefunden, dass sich die atmosphärische Luft bei ihrem gewöhnlichen Feuchtigkeitszustande, um 000244 ihres Volumens für jeden Grad nach Fahrenheit ausdehnt, und dass, wenn die mittlere Temperatur in beiden Stationen 32° F ist, m = 10000 gesetzt werden muss, damit h den Höhenunterschied in englischen Fathoms gibt, es ist daher der Coefficient $r = 1 + 0{,}00244\left(\frac{t + t'}{2} - 32\right)$, wo t und t′ die Lufttemperatur in beiden Stationen bedeuten, und die vollständige Höhenformel ist

$$h = 10{,}000\left(1 + 0{,}00244\left(\frac{t+t'}{2} - 32\right)\log\frac{b}{(1+0{,}000102(T-T')\beta}\right)$$

Ausser diesen Correctionen hat man noch zwei andere angegeben, deren eine von der Aenderung

der Scale des Barometers abhängt, welche durch die Variationen der Temperatur hervorgebracht wird, die anderen hingegen von der Aenderung der Schwere der Luft, bei einem Wechsel der örtlichen Lage. Allein die erstere ist bei dem geringen Wärmeunterschiede, der bei Höhenmessungen Statt haben kann, zu gering, und kann daher wohl vernachlässigt werden, die zweite ist eine subtile Rechnungsaufgabe, deren Resultate innerhalb der Grenzen der Genauigkeit anderer Daten des Problems liegen. Die Correctionen, welche ich angebe, um die Formel dem wahren Zustande der Luft in Rücksicht der Feuchtigkeit anzupassen, ist weit wichtiger.

Wenn sich die Dichte der Dünste in verschiedenen Höhen nach denselben Gesetzen richtete, wie die der Luft, in der sie schweben, so ist klar, dass ihre grössere oder kleinere Menge in obiger Formel gar keine Correction nöthig machte, in so fern diese Correction bloss vom Druck abhängt. Denn bedeuten b und β die Höhe beider Quecksilbersäulen in ganz trockener Luft, f und f′ hingegen die Elasticität des Dampfes in der oberen und unteren Station, so hat man

$$b : f = \beta : f'$$

$$b : b + f = \beta : \beta + f' \text{ d. i.}$$

$$\frac{b}{\beta} = \frac{b + f}{\beta + f'} \text{ und}$$

$$\log \frac{b}{\beta} = \log . \frac{b + f}{\beta + f'}.$$

Allein das Daseyn der Feuchtigkeit fordert selbst, wenn obige Voraussetzung gilt, eine Correction wegen der Ausdehnung der Luft, die sie hervorbringt, ein

Umstand, den man bisher ganz vernachlässigt hatte. Es ist aber auch obige Voraussetzung, dass die Dichte der Luft so abnimmt wie die der Dünste, nicht der Erfahrung gemäss; denn die Abnahme der Temperatur nach oben zu, das häufige Ausscheiden der Dünste gegen die Oberfläche der Erde, wodurch das Aufsteigen anderer beständig gehemmt wird, die eigene Gestalt der Luftsäulen, welche als pyramidal betrachtet werden können, deren gemeinschaftliche Spitze in der Erde Mittelpunct liegt, alles dieses zusammen bewirkt, dass die oberen Luftschichten sowohl absolut als relativ trockener seyn müssen als die, welche die Oberfläche des Oceans berühren. Ich habe anderswo (Edinburgh. Encyclop. Art. Hygrometrie Sec. 91) gezeigt, dass die absolute Feuchtigkeitsmenge der Luft in einer Höhe von 9500 F. die Hälfte von der an der Meeresfläche beträgt, und mehrere Beobachtungen, die ich unter günstigen Umständen von dem Fusse bis zum Gipfel des Beiglor, eines der höchsten Berge von Perthshire anstellte, überzeugten mich, dass die Linie der Feuchtigkeit eine logarithmische ist, und andere Beobachtungen bekräftigten dieses Resultat, welches um so genügender ist, als die absolute Feuchtigkeitsmenge in beiden Fällen sehr verschieden war. Betrachtet man, dass die Dichte der Luft in einer Höhe von etwa 18000 F. die Hälfte von der an der Oberfläche beträgt, während die Wasserdünste dieselbe Veränderung schon in einer Höhe von 4500 F. erleiden, so sieht man, dass der verschiedene Feuchtigkeitszustand zu verschiedenen Zeiten das Gesetz der Luftsäulen verschieden abändern, und eine Abweichung von der geometrischen Progression her-

vorbringen muss. Stellen a, ar, ar^2 etc. die Dichten der aufeinander folgenden Schichten trockener Luft vor, $\nu, \nu\rho, \nu\rho^2$ etc. die der entsprechenden Dampfschichten; so sieht man, dass die Glieder, welche die Dichte der feuchten Luft angeben, nämlich $a + \nu$, $ar + \nu\rho$, $ar^2 + \nu\rho^2$, keine geometrische Progression mehr bilden.

Die Höhendifferenz, welche man aus der gewöhnlichen Formel ableitet, müsste die wahre Höhe um so mehr übertreffen, je grösser die in der Luft vorhandene Dunstmenge ist, weil die Elasticität der Dünste in der unteren Station einen grössern Einfluss auf die Höhe der Quecksilbersäule ausübt, als in der oberen, allein diesem widerspricht die Erfahrung, denn ich habe bei zahlreichen Beobachtungen gefunden, dass die nach der gewöhnlichen Formel berechneten Höhen desto mehr unter der wahren zurückbleiben, je wärmer und feuchter es ist. Die Ursache liegt in der durch die Dünste bewirkten Ausdehnung der Luft, welche dem Einflusse auf den Druck entgegen wirket, und oft diese Wirkung gar aufhebt, so dass das Gesetz der Abnahme der Dichte der Luft, gerade wie bei vollkommener Trockenheit derselben, ausfällt. Daher muss in obiger Formel ein neuer Coefficient angebracht werden, welcher eine Function der durch die Feuchtigkeit bewirkten Ausdehnung der Luft ist, und zum Theil von der absoluten Feuchtigkeit in beiden Stationen, zum Theil von der Temperatur der mittlern Luftsäule abhängt. Diese zwei Correctionen machen alle Differenzen verschwinden, welche bisher bei Höhenmessungen mit dem Barometer, die Personen von anerkannter Genauigkeit anstellten, Statt fanden; und die durch diese Correction modificirte Höhenformel gibt Resultate,

welche mit den durch das Nivelliren oder trigonometrische Messungen erhaltenen genau übereinstimmen, während de Luc's oder Laplace's Formel bei einer Höhe von 1000 F. manchmal eine Differenz von 40 — 50 F. gibt.

Spannkraft und Menge der Dünste in der Luft.

Um diese zwei Correctionen wegen der Feuchtigkeit anbringen zu können, muss man zuerst die absolute Elasticität der Wasserdünste genau erforschen, entweder indem man die Anzeigen eines genauen Hygrometers auf die entsprechende Spannung der Dünste reducirt, oder durch einen wirklichen Versuch die Temperatur erforscht, bei welcher sich der Dunst aus der Luft absetzt, wie Dalton empfiehlt. Die erste dieser zwei Methoden ist sehr mühsam und unsicher, denn das Gesetz, welches die Spannung der Dünste mit dem Hygrometergrade verbindet, ist nur für das Saussurr'sche Hygrometer genau untersucht, und da nur bei einer bestimmten Temperatur, so dass man es für eine andere Temperatur kaum wohl brauchen kann. Daltons Methode ist zwar einer grossen Präcision fähig, wenn man die Versuche mit Sorgfalt anstellt, aber nicht unter allen Umständen ausführbar; auch begegnet das Daniell'sche Hygrometer nicht allen dagegen gemachten Einwürfen *). Aber das Gesetz, an welches die Verdünstung des Wassers in einem ganz trockenen, oder nur zum Theil mit Wasserdunst er-

*) Körners vortreffliches Hygrometer ist dem Verfasser wahrscheinlich unbekannt.

füllten Mittel gebunden ist, setzt uns in den Stand, die Spannkraft der Wasserdünste genauer und einfacher zu finden, als dieses aus den Anzeigen eines Hygrometers geschehen kann, weil sie nicht so viel Rechnung fordert, um das Endresultat zu erhalten wie die Dalton'sche Methode. Weil das Wasser beim Uebergange in Dünste soviel Wärme absorbirt, dass, wäre es flüssig geblieben, dadurch seine Temperatur um 900° F. (500° C.) erhöhet worden wäre, so muss die Verdünstung seines 900ten Theils seine Temperatur um 1° F herabsetzen, falls ihm von der Umgebung keine Wärme zufliesst. Ist F die Spannkraft der Dünste für die Temperatur T des Mittels, worin sie sich bilden, f die der schon vorhandenen Dünste, so ist nach Dalton's Versuchen die in einer Zeiteinheit verdünstende Wassermenge dem Ausdrucke F — f proportionirt. Da nun die durch Verdünstung entstehende Kälte eine Function derselben Grösse ist, so hat man als erste Annäherungsgleichung

$$T - t = A(F - f) \qquad (I.)$$

wo t die von einem Thermometer angezeigte Temperatur, dessen Kugel mit feuchten Papier oder einer andern, die Feuchtigkeit einsaugenden Substanz bedeckt ist, und A einen durch Erfahrung bestimmten Coefficienten vorstellt. Ist die Linie, deren Coordinaten sich zu einander verhalten, wie sich die durch die Verdünstung erzeugte Kälte zur Spannkraft der Dünste verhält, eine Art parabolischer Linie, so kann man darauf die Gleichung

$$T - t = A(F - f) + B(F - f)^2 + C(F - f)^3 + \text{etc.}$$

anwenden. Da aber F — f innerhalb der Grenze, wo man hygrometrische Beobachtungen anstellt, nur ein

kleiner Bruch ist, so kann man die das Quadrat über steigenden Potenzen vernachlässigen und setzen:

$$T - t = A(F - f) + B(F - f)^2, \text{ d. i.}$$

$$f = F + \frac{A}{2B}\left(1 \mp \sqrt{\left(\frac{1 - 4B\delta}{A^2}\right)}\right),$$ wenn man $T - t = \delta$ setzt. Aus der Natur der Aufgabe folgt, dass das Zeichen — allein gebraucht werden kann.

Will man A und B bestimmen, so muss man zwei Bedingungsgleichungen haben, in welchen F, f und δ bekannt sind. Ich habe gefunden $A = 34.75$ und $B = 3.11$, so dass man in obiger Gleichung erhält

$$f = F + 5.586(1 - \sqrt{(1 + 0.103\delta)})$$

Um dieses durch ein Beispiel zu erläutern, sey die Spannkraft des Wasserdunstes bei der Lufttemperatur von 60° zu suchen, wo das mit feuchtem Papier an der Kugel bedeckte Thermometer auf $51\frac{1}{2}$° zeigt.

Nach Dalton ist das Maximum der Spannkraft der Dünste bei 60° gleich $0{,}524 = F$, und $\delta = 60 - 51\frac{1}{2} = 8\frac{1}{2}$, mithin

$$f = 0{,}524 + 5.686(1 - \sqrt{(1 + 0.0103 \times 8.5)} = 0.285$$

Diesem gemäss wird die relative Spannkraft der Dünste in der Luft, oder das Verhältniss der bestehenden Spannung zum Maximum der Spannung für dieselbe Temperatur durch den Bruch $\frac{285}{524} = 0.5439$ ausgedrückt.

Um dieses Resultat mit der Spannung der Dünste vergleichen zu können, wie sie sich aus den von Dulong gemachten Versuchen für die Grade des de Luc'schen Hygrometers ergeben, beobachtete ich an einem solchen jüngst adjustirten Instrumente den Feuchtigkeitsgrad und fand ihn 35°. Nach Dulong's sorgfältig angestellten Versuchen entspricht dem Stande

von 31°,8 die Expansivkraft 0.4874, und dem Stande 37°,5 die Spannkraft 0,5912. Daraus ergibt sich durch Interpolation, dass die Spannkraft der Dünste, welche der Temperatur von 35° entspricht = 0.5456 ist, welches vom vorigen Resultate nur um 0.0017 abweicht. Da ich kein Saussuresches Hygrometer zur Hand hatte, so konnte ich obiges Resultat mit dem, welches sich aus der Vergleichung Biots zwischen der Spannung der Dünste und der Anzeige dieses Instrumentes ergibt, nur dadurch vergleichen, dass ich den Saussureschen Feuchtigkeitsgrad, welcher dem des de Luc'schen entspricht, aus einer genauen Vergleichung beider Instrumente abnahm. Nach de Luc's Resultaten entspricht 35° de Luc 75° Saussure und 37,5 jenes 84° dieses, mithin sind obige 35° mit 80° des Saussureschen Instrumentes übereinstimmend. Nimmt man aus diesen Resultaten das Mittel, so entprechen 35° de Luc 76°5 Saussure, welche nach Biot und Gay-Lussac die Spannung 0.5599 anzeigen. Dieses weicht vom obigen nur um 0,16 ab, ein Unterschied, der innerhalb der Grenzen der Abweichung beider Instrumente liegt. Aehnliche Uebereinstimmungen anderer Beobachtungen an einem gewöhnlichen Thermometer und einem, dessen Kugel mit befeuchtetem Papier bedeckt ist, zeigen, dass diese Formel für hinreichend genau angenommen werden kann, um den Feuchtigkeits-Zustand der Luft darzustellen. Es hat obiges Verfahren den Vorzug, dass es nicht vom Alter der Instrumente abhängt, wie bei den Hygrometern, die aus einer organischen Substanz bestehen, denn man braucht dazu nichts als Dalton's Tafel der Spannkräfte des Wasserdunstes und zwei gute Thermometer. Da

man aber obige Formel für zu verwickelt halten könnte, so will ich sie auf eine andere Form bringen, welche ohne Nachtheil für ihre Genauigkeit die Auflösung des Problems von einer einfachen Gleichung abhängig macht. Man setze desshalb statt

$$\delta = A(F - f) + B(F - f)^2$$

$$\delta = A(F - f) + B(F - f)(F - f),$$

und nehme für δ den aus der Gleichung (I.) abgeleiteten genäherten Werth $\delta = A(F - f)$ oder $\frac{\delta}{A} = F - f$, substituire diesen Werth in obiger Gleichung, so hat man

$$\delta = A(F - f) + \frac{B\delta}{A}(F - f), \text{ d. i.}$$

$$\delta = \left(A + \frac{B\delta}{A}\right)(F - f).$$

Um zu sehen, was für eine Aenderung δ bei einer Aenderung des Luftdruckes erleidet, brachte ich obige zwei Thermometer unter den Recipienten einer Luftpumpe, und fand bei verschiedenen Graden der Dichte der Luft ihre Differenz genau im verkehrten Verhältnisse mit der Dichte der Luft. Da nun die Coefficienten für einen Luftdruck von 30 Zoll gefunden waren, so hat man für den Druck b die Gleichung

$$\delta = \frac{30}{b}\left(A + \frac{\delta B}{A}\right)(F - f), \text{ und hieraus}$$

$$f = F - \frac{b\delta}{30\left(A + \frac{\delta B}{A}\right)}.$$

Zur Bestimmung der Coefficienten A und B sind zwei Gleichungen nöthig. Ich fand durch Vergleichung einer grossen Anzahl von Beobachtungen, die

bei sehr verschiedener Temperatur und Feuchtigkeit angestellt wurden A = 36, B = — 3,6, so; dass man erhält:

$$f = F - \frac{b\delta}{30\left(36 - \frac{\delta}{10}\right)}, \text{ oder}$$

$$f = F - \frac{\frac{1}{6} b\delta}{180 - \frac{\delta}{2}}$$

Dieser sehr einfache Ausdruck gibt nahe dieselbe Spannkraft der Dünste wie der vorige. Wendet man ihn auf obige Daten an, welche bei einem Luftdrucke von 30.4 Z. Statt fanden, so bekömmt man

$$f = 0.524 - \frac{\frac{1}{6} \times 30.4 \times 8.5}{180 - \frac{8.5}{10}} = 0.524 - 0.240 = 0.284 \text{ Z.},$$

ein Resultat, welches vom vorigen um 0,001 abweicht.

Kennt man einmal die Spannkraft der in der Luft befindlichen Dünste, so kann man leicht das Gewicht der in einem gegebenen Volumen atmosphärischer Luft enthaltenen Feuchtigkeit finden. Es sey φ die Spannkraft der Dünste in der Luft, nachdem sie von ihrer eigentlichen Temperatur t auf die Temperatur τ gebracht sind, bei welcher sie in tropfbaren Zustand überzugehen anfangen, so dass φ das Maximum der Spannkraft für die Temperatur τ ist. Nach Gay-Lussac dehnen sich die Dünste, so lange sie ausdehnsam sind, wie die Luft aus, nämlich für jeden Grad Fahrenheit um 0,002086 des Volumens bei 32 F. Wird daher der Dunst, dessen Spannkraft dem Maximum der Spannkraft φ für τ^0 gleich kömmt, auf die Temperatur t gebracht, so wird sie

$$\varphi\ (1 + 0.002086(t - \tau) \text{ mithin ist}$$

$$f = \varphi\ (1 + 0.002086\ (t - \tau) \text{ oder}$$

$$\varphi = \frac{f}{1 + 0.002086\ (t - \tau)}$$

Hier ist zwar τ unbekannt, jedoch kann man annäherungsweise annehmen, dass es der Temperatur, für welche f das Maximum der Spannkraft ausdrückt gleich kommt. Ist f = 0.284 t = 60°, so beträgt nach Daltons Tafel $\tau = 42°$, mithin wird

$$\varphi = \frac{0{,}284}{1 + 0{,}002086(60 - 42)} = \frac{0.284}{1.0375} = 0{,}274.$$

welches mit dem Maximum der Spannkraft für 41° übereinstimmt. Will man ein schärferes Resultat erlangen, so wiederhohlt man die Rechnung mit $\tau = 41°$, wodurch man findet $\varphi = 0.273$. Da nun nach Gay-Lussacs Versuchen das Gewicht der Dünste $\frac{5}{8}$ von dem der Luft beträgt, und das Gewicht von 100 Kubikzollen Luft nach Arago und Biot am Frierpunct und bei einem Luftdruck von 30 Z. 32,9 englische Gran beträgt, so ist das Gewicht dieses Volumens Dünste bei der Temperatur τ und unter dem Drucke φ gleich

$$\frac{\frac{5}{8} \times 32{,}9 \cdot \varphi}{30(1 + 0.002086(\tau - 32)} = \frac{0.6854\ \varphi}{1 + 0.002086(\tau - 32)}.$$

Für $\varphi = 0.273$ und $\tau = 41°$ erhält man 0.18367 G. als das Gewicht der Feuchtigkeit in 100 K. Zoll Luft, die bei 41° ganz mit Dünsten gesättiget ist.

Ist die wirkliche Lufttemperatur 60°, so beträgt das Gewicht der Dunstmenge in 100 K. Zoll, welche durch Erwärmung von 41° auf 60° ausgedehnt wurde

$$= \frac{0.18367}{1 + 0.002086(60 - 41)} = 0.17671 \text{ Gran.}$$

Die Temperatur τ des sogenannten Bethauungs-

punctes (wo Daniells und Körners Hygrometer beschlagen zu werden anfängt). Diese Temperatur ist wesentlich von der verschieden, welche ein Thermometer zeigt, dessen Kugel befeuchtet ist. Im obigen Falle ist der Thaupunct 41°, während das Thermometer mit der befeuchteten Kugel $51\frac{1}{2}$ zeigt. Nach meiner Formel findet die grösste Differenz eines trockenen und eines Thermometers mit befeuchteter Kugel Statt, wenn $f = 0$ ist; in diesem Fall wird $F = \frac{\frac{1}{8}b\delta}{180 - \frac{1}{2}\delta}$

d. i. $\delta = \frac{1080\ F}{b + 3\ F}$. Bei ganz trockener Luft von der Temperatur 60° und einem Luftdruck von 30 Z. wird daher $\delta = \frac{1080 \times 0.524}{30 + 1.572} = 17.9$

Correction der Höhenformel wegen der Feuchtigkeit.

Die erste an der gewöhnlichen Höhenformel anzubringende Correction hat zum Gegenstande, den Druck in beiden Stationen auf den zu reduciren, der bei ganz trockener Luft Statt finden würde, so dass man statt des gewöhnlichen Coefficienten

$1 + 0.00244 \left(\frac{t + t'}{2} - 32\right)$ den aus der Ausdehnung ganz trockener Luft sich ergebenden

$$1 + 0.002086 \left(\frac{t + t'}{2} - 32\right)$$ setzen kann.

Es sey f die Spannkraft der Dünste der unteren Station, wo der Druck b Statt findet und f′ die der Dünste der oberen Station, wo der schon nach der Temperatur corrigirte Druck β herrscht. Das Gewicht

der Dünste ist $\frac{5}{8}$ von dem der trockenen Luft bei einerlei Druck, es verhält sich daher das Gewicht der Dünste zu dem der trockenen Luft, wie $\frac{5}{8}$ f : b. Da aber die Dichte der Dünste viermal schneller nach oben zu abnimmt, als die der trockenen Luft, so verhält sich das Gewicht der Dunstsäule, deren Spannkraft f ist, zu dem der trockenen Luft, wie $\frac{1}{4} \times \frac{5}{8}$f oder nahe wie $\frac{1}{6}$f : b. Es verhält sich daher das Gewicht der trockenen Luftsäule in der unteren Station zu derselben in ber oberen wie b — $\frac{1}{6}$f : β — $\frac{1}{6}$f′.

Die zweite viel wichtigere Correction, beruht auf der Ausdehnung der trockenen Luft durch Zusatz von Dünsten. Man wusste schon lange, dass sich feuchte Luft in einem mit Wasser gesperrten Recipienten durch die entstehenden Wasserdünste bei der Wärme in einem grössern Verhältniss ausdehnt als trockene. Gay-Lussac und Dalton haben auch bestimmt dargethan, dass die Elasticität einer Mischung von Luft und Dünsten, so lange letztere ihre Ausdehnsamkeit behalten, der vereinten Ausdehnsamkeit beider gleich ist. Stellt nun V ein gewisses Volumen trockener Luft bei einer bestimmten Temperatur und bei einem gegebenen Luftdrucke b vor, während f die Spannung der Wasserdünste bei derselben Temperatur bezeichnet, ist ferner V′ das durch Beimischung der Dünste vergrösserte Volumen der Luft bei demselben Drucke b, so ist die Elasticität der reinen Luft, die im verkehrten Verhältnisse mit dem Volumen steht $= \frac{bV}{V'}$. Gibt man nun Dünste von obiger Spannkraft f hinzu, so wird die Elasticität der Mi-

schung $= \frac{bV}{V'} + f$. Da aber diese Mischung unter dem Druck b steht, so hat man wieder $\frac{b.V}{V'} + f = b$ d. i.

$$\frac{V'}{V} = \frac{b}{b-f}.$$

es verhält sich also das Volumen der feuchten Luft zu dem der trockenen wie $b : b - f$, oder wie $1 + \frac{b-f}{f} : 1$. Desshalb muss eine Luftsäule, welche Dünste von der Spannkraft f enthält, die Länge $1 + \frac{f}{b-f}$ bekommen, wenn sie im trockenen Zustande die Länge 1 hatte.

Diese Correction bringt man am zweckmässigsten so an, dass man statt f die mittlere Spannung der Dünste in der obern und untern Station, d. i. $\frac{f+f'}{2}$, und eben so statt b den mittlern Luftdruck, nämlich $\frac{b+\beta}{2}$ setzt. Man erhält daher

$$1 + \frac{\frac{f+f'}{2}}{\frac{b+\beta}{2} - \frac{f+f'}{2}} = 1 + \frac{f+f'}{b+\beta-(f+f')}.$$

Die vollständige Formel mit der von mir angebrachten und erwiesenen Correction hat eine kaum complicirtere Form als sie sonst hatte, während sie doch der veränderlichen Beschaffenheit der atmosphärischen Luft mehr angemessen ist. Heisst, wie früher, h der Höhenunterschied beider Stationen, so hat man

$$h = 10{,}000 \left(1 + 0.002086 \left(\frac{t + t'}{2} - 32\right)\right.$$
$$\left.\left(1 + \frac{f + f'}{b + \beta - (f + f')}\right) \log \left(\frac{b - \frac{1}{6}f}{\beta - \frac{1}{6}f'}\right)\right.$$

wo t die Temperatur der Luft, f die Spannkraft der Dünste, b die Höhe der Quecksilbersäule bei der Temperatur T in der unteren Station ist, während t′, f′, b′, T′ dasselbe in der oberen Station bedeuten, und $\beta = (1 + 0.000102\ (T - T')$ ist.

Nimmt man statt des hier gebrauchten Coefficienten den aus dem Verhältnisse zwischen dem specifischen Gewichte der Luft und des Quecksilbers gefundenen, und wendet übrigens das Celsische Thermometer und Pariser Mass an, so bekommt man die Höhe in Pariser Fuss durch die Formel

$$h = 56566 \left(1 + 0.00375 \left(\frac{t + t'}{2}\right)\right) \left(1 + \frac{f + f'}{b + \beta - (f + f')}\right) \log \left(\frac{b - \frac{1}{6}f}{\beta - \frac{1}{6}f'}\right)$$

wobei $\beta = 1 + 0.00018\ (T - T')$ ist.

Der Verfasser lässt nun mehrere Höhenberechnungen folgen, die nach seiner Formel vorgenommen wurden, und verglich die Resultate mit den durch trigonometrische Messung oder durch Nivelliren gefundenen; die Vergleichung ist allerdings geeignet, obiger Höhenformel zur Empfehlung zu dienen. Ueberhaupt zeigt es sich dabei deutlich, dass die gewöhnliche Formel zur Bestimmung der Berghöhen mittelst des Barometers, in welcher man, der Feuchtigkeit wegen, den Coefficienten 0,002086 auf 0,00244 (oder wenn man sich eines Celsischen Thermometers bedient 0,00375 auf 0,004) erhöht, nur bei einem mittleren Feuchtigkeitszustande

der Luft hinlänglich genaue Resultate gibt, dass sie aber bei grosser oder gar geringer Feuchtigkeit keine hinreichende Genauigkeit gewährt.

VI. Höhenmessung mit *einem* Barometer nebst den dazu erforderlichen Tafeln von Nixon.

(Annals of phylosophy. January 1826.)

Gegenwärtiger Aufsatz enthält so viele wichtige Winke über einzelne Puncte, die man bei barometrischen Höhenmessungen zu beobachten hat, dass ich ihn für einen der unterrichtendsten über dieses Geschäft halte. Allein er ist an vielen Stellen etwas zu kurz gefasst und dunkel, und alle Zahlenwerthe beziehen sich nur auf englisches, für Deutsche immer etwas unbequemes Mass und auf Fahrenheits Thermometerscale, auch empfiehlt der Verfasser ausschliesslich das Barometer von Engelfield, das doch schon durch bessere verdrängt ist. Desshalb habe ich mir erlaubt, hie und da die Sache etwas weiter auseinander zu setzen, die Ordnung ein wenig abzuändern, das weniger Interessante wegzulassen, alle Zahlenwerthe auf das gangbarste, nämlich das französische Fussmass und auf hunderttheilige Wärmegrade zu reduciren, und eine auf jedes Barometer anwendbare Sprache einzuführen.

---

1. Man hat so selten bei einer Reihe barometrischer Beobachtungen einen verständigen Freund zum fortwährenden Begleiter, und kann doch ohne Wagestück nicht von Fremden die gehörige Sorge für Instrumente und Genauigkeit in der Beobachtung erwarten, dass besonders Geologen und Botaniker meistens genöthiget sind, bei ihren Höhenbestimmungen auf gleichzeitige Beobachtungen in zwei Stationen zu verzichten und den minder genauen und langweilige-

ren Weg einzuschlagen, mit einem Barometer die Sache abzuthun..

2. Zu diesem Behufe braucht man nebst einem guten Barometer und Thermometer auch noch ein leichtes dreifüssiges Gestell zum Aufhängen des Barometers, und als oft recht gelegenen Stellvertreter desselben einen eisernen Stab von etwa 12 Z. Länge, der an einem Ende hakenförmig gebogen, am anderen aber zugeschärft ist, um ihn in Spalten von Felsen, Mauern etc. hineintreiben zu können.

Bei vielen Gelegenheiten leistet auch ein etwa 12zölliges Fernrohr mit gehörig adjustirten Kreuzfäden und einer Wasserwage gute Dienste.

3. Da zur Bestimmung der Erhöhung eines Ortes über einen anderen die Kenntniss des gleichzeitigen Luftdruckes in beiden Stationen unerlässlich ist, und doch gleichzeitige Beobachtungen nicht angestellt werden können, so muss man zuerst die Barometerhöhe in der unteren Station beobachten und die Variation derselben, bis zur Zeit der Beobachtung in der oberen, durch Schätzung finden. Dieses geschieht dadurch, dass man in der unteren Station nach der Rückkehr von der oberen eine zweite Beobachtung des Luftdruckes anstellt, mittelst der zwischen beiden verflossenen Zeit die stündliche Aenderung desselben berechnet, und ihren Betrag bis zur Zeit der Beobachtung an der oberen Station zur ersten Barometerhöhe mit ihrem Zeichen (+ oder —) setzt. Ist es aber nicht thunlich, wieder in die untere Station zurückzukehren, so lässt man daselbst gleich auf die erste Beobachtung nach Verlauf einer Zeit, die wenigstens halb so lang ist als die, welche man braucht, um auf den obersten Punct zu ge-

langen, eine zweite folgen, und findet daraus die Variation des Luftdruckes durch Interpolation. Erreicht man aber die untere Station auf einem anderen Wege oder gelangt man in eine zweckmässige niedere Lage, so kann man auch diese Aenderung aus zwei oder mehreren innerhalb einer oder zwei Stunden angestellten Beobachtungen abnehmen. Nimmt man nun aus den Resultaten in beiden Plätzen das Mittel, so erhält man den gleichzeitigen Luftdruck in der Vergleichungsstation mit erträglicher Genauigkeit. Man muss aber zuvor die Barometerhöhen auf einerlei Temperatur reduciren. Am besten thut man, wenn man die Temperatur des Quecksilbers bei der ersten Beobachtung in der unteren Station als Normale annimmt.

4. Nun bleibt noch die Temperatur zu bestimmen übrig, welche in der unteren Station zur Zeit der Beobachtung in der oberen Statt fand. Diese kann nicht durch Interpoliren gefunden werden wie der Luftdruck, sondern man muss sie aus dem Gang der Wärme des Tages abnehmen.

Zu diesem Zwecke muss man in der Vergleichungsstation oder in einer anderen, welche dieselbe Erhöhung hat und unmittelbar an sie grenzt, die Temperaturen innerhalb kurzer Zwischenzeiten, nebst der Zeit, in welcher sie Statt fanden, in eine Tabelle verzeichnen lassen, die man von einem Thermometer abnimmt, welches in der Höhe des Auges vom Beobachter in einem nördlichen, dem Winde zugänglichen Orte befestiget ist. Kann man sich keine solche Tabelle machen lassen, so setzt man in der Höhenformel die doppelte Anzahl der Wärmegrade in der oberen Station für die Summe der Temperaturen in beiden Sta-

tionen und vermehrt dann die sich so ergebende Höhe um das Quadrat ihres 500. Theils. Uebersteigt der Höhenunterschied nicht 3500 F., so findet man die Zugabe in der fünften der folgenden Tafeln.

5. Alles dieses wird aber nur dann zu erträglich genauen Resultaten führen, wenn die Umstände den Beobachtungen des Luftdruckes und der Temperatur günstig sind. Obige Interpolationsmethode verlangt, wenn sie zu sicheren Resultaten führen soll, dass das Barometer völlig oder fast stationär sey und auf mittlerer Höhe für den gegebenen Platz stehe *). Bei diesem Zustande der Atmosphäre ist der Druck höchst wahrscheinlich in einer weiten Strecke bei derselben Höhe auch derselbe, und die Aenderung des Luftdruckes zwischen beiden Beobachtungen unbedeutend, ja was noch wichtiger ist, und unter anderen Umständen seltener eintrifft, fast gleichförmig. Nur da, wo die horizontale Entfernung beider Stationen gering ist, verdient die Zeit des grössten Luftdruckes den Vorzug, weil da die Dichte der Luft der des Quecksilbers am nächsten steht. Ferner sollen die Beobachtungen erst eine oder zwei Stunden nach Sonnenaufgang beginnen und wo möglich eben so lange vor Sonnenuntergang beendiget werden.

Was die günstigste Temperatur anbelangt, so scheint kaltes Wetter am zuträglichsten zu seyn, weil da die veränderliche Correction für die Feuchtigkeit unbedeutend und der Unterschied zwischen der Dichte

*) Man findet diese Höhe mit hinreichender Genauigkeit, wenn man zu der Barometerhöhe an der Meeresfläche, in Tausendtel der Zolle ausgedrückt, die Höhe des Ortes über dem Meere addirt.

der Luft und des Quecksilbers geringer ist; allein da die Barometer-Beobachtungen, mittelst welcher der Hauptcoefficient in der Höhenformel gefunden wurde, bei Temperaturen angestellt wurden, die etwas über den mittleren standen, so ist es wohl am klügsten, ruhige bewölkte Tage zu benützen, in denen das Thermometer zwischen 10° — 15° C steht.

Man muss möglichst die Zeit meiden, wo der Luftdruck gering, schwankend und stark veränderlich ist, wo starke und besonders veränderliche Winde herrschen oder das Wetter heiss und ungewöhnlich trocken oder feucht ist. Kalte Winde bei starkem Sonnenschein machen es unmöglich, die wahre Temperatur des Quecksilbers und der Luft zu erfahren, Extreme in der Temperatur sind, wenn sie im Verlaufe der Beobachtungen vorkommen, sehr unzuträglich.

An der Meeresfläche bleibt die Barometerhöhe bei allen Abwechslungen der Temperatur unverändert. Auf einer Anhöhe steigt und fällt die Quecksilbersäule bei jedem Zuwachs und bei jeder Abnahme der Temperatur, welche der unterhalb befindlichen Luftmasse zu Theil wird. Daher ist es unmöglich, die Aenderung des Luftdruckes auf einem hohen Standpuncte genau zu schätzen und unumgänglich nothwendig, wie immer der zu messende Höhenunterschied beschaffen seyn mag, das Barometer zuerst in der untersten benachbarten Station aufzustellen, um jenes Datum mit der erforderlichen Genauigkeit zu erhalten. Bei der darauf folgenden Berechnung muss man anfangs die Höhe der oberen Stationen über die unterste unmittelbar suchen, aus denen dann die relativen Höhen der

Zwischenstationen durch blosse Subtraction erhalten werden können.

6. Es bleibt nur noch zu zeigen übrig, wie die Beobachtungen angestellt und verzeichnet werden.

Beim Transport des Barometers halte man dasselbe stets in einiger Entfernung vom Körper, und wenn es thunlich ist, auf der Schattenseite, das obere Ende nach vorwärts gekehrt, ausgenommen beim Erklimmen steiler Abhänge, wo es sicherer ist, es rückwärts zu halten. Macht man Halt, so hüte man sich, es auf feuchten Boden, oder auf Felsen zu legen, die den Sonnenstrahlen ausgesetzt sind. Kommt man in der Station an, so errichte man den Dreifuss, drücke die Schenkel wohl in den Boden ein, oder wenn er zu fest ist, häufe schwere Steine um sie an. Ist eine Mauer, ein Fels, ein Baum etc. in der Nähe, so bediene man sich statt des Dreifusses des eisernen Hakens, und befestige ihn auf der Schattenseite, in rechter Höhe. Ist die Gegend ganz den directen Sonnenstrahlen ausgesetzt, oder die Schattenseite eines Felsen, einer Mauer etc. dem Winde so sehr Preis gegeben, dass man den Haken an der Sonnenseite befestigen muss, so ist es nothwendig, das Barometer durch einen Schenkel des Dreifusses, durch Rasenstücke, Steine etc., oder durch einen eigens dazu vorhandenen Schirm zu beschatten. Bei stürmischem Wetter hemmt man das Schwanken der Quecksilbersäule, indem man den unteren Theil des Barometers mit Erdschollen etc. umgibt, aber wohl darauf sieht, dass das Instrument seine verticale Lage beibehält.

Manchmal kann man wegen dem Ungestüm des Wetters weder vom Dreifuss noch vom Haken Ge-

brauch machen. Hat man nun einen Gehülfen und ein Fernrohr mit einem Fadenkreuze und einer Libelle bei der Hand, so kann man sich auf folgende Weise einen Platz zur sicheren Aufstellung des Barometers suchen: Es wird das Fernrohr mit der Libelle am obersten Puncte aufgestellt, der Beobachter steigt über den windwärts gelegenen Abhang des Berges so weit hinab, bis ihm der Gehülfe, welcher ihn mit dem Fernrohre verfolgt, ein Zeichen gibt, dass die Blase der Wasserwage auf die Mitte einspült, und das Kreuz im Fernrohre mit dem Auge des Beobachters einerlei Höhe hat. Auf den Platz, den der Beobachter unter diesen Umständen einnimmt, stellt man das Fernrohr von Neuem auf, wenn er noch nicht gegen den Wind hinlänglich gesichert seyn soll, und wiederhohlt dieses Verfahren so lange, bis man an einem sicheren Orte anlangt, wo man den Dreifuss oder den Haken befestigen kann. Multiplicirt man dann die Höhe des Auges des Beobachters über den Boden mit der Anzahl der vorgenommenen Nivellirungen, so erhält man die ganze Höhe, um die man hinabgestiegen ist. Ist der Bergrücken eine ausgedehnte Ebene, so kann sich der Beobachter auf einen Fels oder einen Damm setzen, das Barometer zwischen den Knieen halten, und ihm eine auf irgend einen fernen Bergrücken oder eine andere horizontale Ebene senkrechte Lage geben. Sucht man durch Neigen des Barometers die Stellung, bei der es am tiefsten steht, so hat man die auf den Horizont senkrechte Lage desselben gefunden.

Befindet sich die Oberfläche des Quecksilbers im kürzeren Schenkel nicht in einerlei Höhe mit der Sta-

tion, so muss man dieses in Rechnung bringen, und im Tagebuche anmerken. Beträgt dieser Höhenunterschied nicht mehr als 5—6 Fuss, so entspricht jedem Fuss nahe 0,001 Zoll der Höhe der Quecksilbersäule; man muss daher für jeden Fuss, um den das Barometer tiefer oder höher hängt, als der oberste Punct der Station, die beobachtete Barometerhöhe um 0,001 Z. vermehren oder vermindern.

Wenn das Instrument sicher am Dreifuss oder am Haken aufgehängt ist, öffne man den geschlossenen Schenkel desselben und klopfe sanft an dessen Seite. Nach Verlauf von 15 Minuten bei trübem Wetter, aber erst nach einer doppelt so langen Zeit bei starkem Sonnenschein merke man den Stand des am Barometer befindlichen Thermometers an, lege dieses Instrument (wenn es nicht unveränderlich mit dem Barometer verbunden ist, widrigenfalls man nebst diesem noch ein anders zur Hand haben müsste) an einen beschatteten, der freien Luft, aber nicht einem partiellen Luftstrom ausgesetzten Ort, der sich 5 oder 6 Fuss über dem Boden befindet und nicht kurz vorher von directen Sonnenstrahlen getroffen wurde, auch nicht besonders feucht ist. Nun stellt man den Nonius an der Scale des Barometers gehörig ein, bemerkt, nachdem dieses geschehen ist, die Temperatur der Luft und gleich darauf die Höhe der Quecksilbersäule im Barometer nebst der Zeit dieser Beobachtung.

7. Hat man alle erforderlichen Beobachtungen an der obersten Station gemacht, so kann man beim Hinabgehen in die untere Station die Höhe einiger umliegender Berge nach folgender Methode messen: Man wähle sich den höchsten sichtbaren Gegenstand aus,

den man messen will, richte von Zeit zu Zeit das Fernrohr so auf ihn, dass sein Gipfel in den Durchschnittspunct der Kreuzfäden liegt. Hat man den Ort erreicht, wo bei der genannten Richtung des Fernrohres die Blase der Libelle den mittleren Platz einnimmt, so stelle man es da fest auf, und ändere seine Höhe so lange, bis der Durchschnittspunct der Kreuzfäden im Fernrohre den höchsten Punct des genannten Berges trifft, und zugleich die Blase der Wasserwage gehörig einspielt.

Hier wird das Barometer aufgestellt, die zur Bestimmung der Höhe nöthigen Beobachtungen gemacht, und dabei auf die Höhe der Unterlage über der Oberfläche des Quecksilbers im kürzeren Schenkel (nach 6) die gehörige Rücksicht genommen. Mittelst dieser Daten, verbunden mit denen an der Vergleichungs-Station, lernt man durch Rechnung die Höhe der Wasserwage über letztere kennen. Vermehrt man diesen Höhenunterschied um das Product aus dem Quadrate der Entfernung des beobachteten Berggipfels, von der Wasserwage in Meilen ausgedrückt, in die Zahl 11.44 *),

*) Die bekannte Formel, welche die Correction wegen der Krümmung der Erde darstellt, ist für eine geringe Entfernung $\frac{a^2}{2r}$, wo a die Länge des zwischen beiden Orten gelegenen grössten Kreisbogens und r den Halbmesser der Erde darstellt. Ist nun φ der Winkel, welchen die zu beiden Endpuncten gehöriger Erdhalbmesser in der Erde Mittelpunct machen, so hat man annäherungsweise

$$\frac{a^2}{2r} = a \tang \frac{\varphi}{2}.$$

Setzt man aber auf Rechnung der irdischen Refraction $\frac{1}{13}$ des Bogens φ, so wird aus obiger Correction folgende:

so erhält man dadurch die Höhe dieses Gegenstandes über die Vergleichungsstation.

Wenn das Fernrohr klein ist, und die horizontale Distanz aus Landkarten abgenommen werden muss, so soll man diese Methode nicht auf Berge anwenden, deren Entfernung grösser ist, als zwei oder drei Meilen.

(Die Fortsetzung folgt.)

VII. Ueber die Bewegung des magnetischen Aequators der Erde.

(Aus dem Berichte Arago's über die in den Jahren 1822 — 1825 unter dem Commando des Herrn Duperre unternommene Entdeckungsreise. Annales de Chimie et de Physique. Decemb. 1825.)

Es ist bekannt, dass es auf der Erde eine krumme Linie gibt, über welcher eine Magnetnadel keine Neigung hat, und die man magnetischen Aequator nennt. Hansteen und Morlet haben die Lage dieser Curve auszumitteln gesucht, sind aber, wie-

---

$$\frac{a^2}{2r} = a \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{15}\right).$$

Für eine andere Entfernung A bekömmt man auf gleiche Weise für den Werth der Correction

$$x = \frac{A^2}{2r} \text{ mithin}$$

$$a^2 : A^2 = a \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{15}\right) : x$$

$$\text{oder } x = \frac{A^2}{a} \operatorname{tang}\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\varphi}{15}\right).$$

Setzt man a = 1 Meile = 22816 Fuss, so wird $\varphi = 4'$
$x = 11.44 \times A^2$.

wohl sie von denselben Daten ausgingen, doch auf nicht ganz übereinstimmende Resultate gekommen. Vorzüglich weichen beide darin von einander ab, dass der mag. Aequator nach **Morlet** in der ö. Länge von 174°, nach **Hansteen** in der östl. Länge von 187° den Erdäquator einmal schneidet, und dass er nach **Hansteen** im Südmeere zwei Knoten bildet, statt deren **Morlet** nur eine Berührung beider Curven annimmt.

Indess ist die Abweichung beider Annahmen von einander nicht so gross, als es im ersten Augenblicke scheint, denn auch nach **Hansteen** weicht der mag. Aequator nur etwa 1°½ vom Erdäquator an der Stelle ab, wo **Morlet** die Berührung annimmt. Beide Gelehrte bestimmten aber den mag. Aequator für das Jahr 1780, und die Frage, ob sich seit dieser Zeit die Gestalt der Linie ohne Neigung oder ob sich ihre Knoten geändert haben, ist wohl aller Aufmerksamkeit werth. Die Arbeiten **Duperrey's** in Verbindung mit denen von **Freycinet** können hierüber Aufschluss geben. **Duperrey** hat den mag. Aequator auf seiner Reise sechsmal durchschnitten und zwar an Puncten, denen folgende Coordinaten entsprechen:

I.	27° 19′ 21″	westl. Länge,	12° 27′ 11″	südl. Br.
II.	14° 20′ 15″	- - -	9° 45′ 0″	- -
III.	83° 38′ —	- - -	7° 45′ —	- -
IV.	85° 46′ —	- - -	6° 18′ —	- -
V.	170° 37′ 24″	östl. Länge	0° 53′ —	nördl. Breite
VI.	145° 2′ 38″	- - -	7° 0′ —	- - - - -

Vergleicht man I. und II. mit **Morlets** Karte, in welcher die Breite des mag. Aequators in der west. Länge von 27°¼ und 14°⅓ gleich ist 14° 19′ und

11° 36′, so findet man, dass sich der Punct des mag. Aequators, welcher 1780 im Meridian von 27°¼ lag, dem Erdäquator um 1° 43′ genähert habe, der im Meridian von 14°⅓ liegende hingegen um 1° 51′. Etwas ähnliches gibt Hansteens Charte. Dieselben Charten geben für die Längen III. und IV. etwa um einen Grad kleinere Breiten, so dass man hier eine entgegengesetzte Bewegung, d. i. eine Entfernung des mag. Aequators vom Erdäquator annehmen müsste. Dasselbe zeigt auch eine Vergleichung der Puncte V und VI. mit der für 1780 entworfenen Charte. Diese scheinbar so widersprechenden Variationen lassen sich erklären, ohne dass man eine Aenderung in der Form des mag. Aequators anzunehmen braucht, wenn man nur eine Bewegung dieser Curve voraussetzt, vermög welcher sie im Ganzen von Jahr zu Jahr von Ost nach West fortschreitet. Soll man aus dieser Voraussetzung obige numerische Werthe ableiten können, so muss die Bewegung vom Jahr 1780 bis zur gegenwärtigen Zeit von der Grösse von 10° angenommen werden. Die Schnelligkeit dieser Bewegung kann nicht gegen obige Annahme sprechen, denn directe Beobachtungen über die Lage der Knoten führen beinahe zu denselben Resultaten. Duperrey traf einen Knoten in 172° östl. L. und in Hansteens Charte fällt er in 184°, im Südmeere nimmt Hansteen 2 Knoten zwischen 108° und 126° w. L. an, und nach Freycinets sehr genauen Beobachtungen liegt dieser Knoten in 132° L. Sabine führt in einem erst vor kurzem erschienenen Werke an, dass der Durchschnittspunct beider Aequatoren, der sich 1780 im Innern von

Afrika weit von der Küste befand, nun bis in den atlantischen Ocean vorgerückt ist, und zwar beträgt diese Vorrückung von 1780 bis 1822 wenigstens 8°. Nach allen diesem ist die fortschreitende Bewegung des mag. Aequators sehr wahrscheinlich. Diese Bewegung hat schon Morlet vermuthet, die auf Freycinet und Duperreys Reise gemachten Beobachtungen geben hinreichende Thatsachen, um sich von ihrer Gewissheit zu überzeugen. Es scheint auch, als wenn die Variationen in der Richtung einer Magnetnadel durch die Form und Lage des mag. Aequators bestimmt würde, wie auch schon Morlet vermuthete. Nimmt man an, der Bogen des magnetischen Meridianes eines Ortes, als grösster Kreis betrachtet, welcher zwischen dem Orte und dem mag. Aequator liegt, sey das Mass der magnetischen Breite dieses Ortes, so findet man im Allgemeinen nach Morlet, dass die Neigung der Magnetnadel da abnimmt, wo durch die Bewegung des mag. Aequators die magnetische Breite vermindert wird, und im Gegentheil wächst, wo diese Breite grösser wird. Morlet glaubte aber Neuholland, Teneriffa etc. machen von dieser Regel eine Ausnahme, aber nach den durch Freycinet und Duperrey bekannt gewordenen Thatsachen kann man die allgemeine Gültigkeit dieser Regel nachweisen. So sieht man, dass die südliche Neigung in St. Helena schnell zunimmt, in Ascension hingegen die nördliche Neigung schnell kleiner wird, weil sich der mag. Aequator vom erstern Orte stark entfernt, dem zweiten hingegen sich stark nähert und ihn bald erreichen wird. Der durch das Kap gehende, gegen Norden verlängerte magne-

tische Meridian geht nahe an der Westseite eines Knoten vorbei, daher muss dort auch die Neigung schnell wachsen, dieses zeigen auch die Beobachtungen von Cook, Bayly, King, Vancouver und Freycinet. In Tahaite fand man in den Jahren 1773, 1774 und 1777 die Neigung der Magnetnadel 30°, Duperrey fand sie 30° 36′, es ist also daselbst die jährliche Variation sehr gering, aber der magnetische Meridian dieser Insel begegnet auch der Linie ohne Neigung fast im Puncte ihrer grössten Breite, d. i. dort, wo sie fast mit dem Erdäquator parallel ist. Es bleibt nun noch übrig zu zeigen, dass auch die Aenderungen der mag. Abweichung mit der Lage des mag. Aequators zusammen hängen, wozu Freycinet und Duperrey alle Daten in der Hand haben. Eine Vergleichung der Beobachtungen dieser Officiere mit denen von Cook und Vancouver zeigt, dass die Abweichung in Tahaiti südlich von beiden Aequatoren und in den Sandwichsinseln in einer nördlichen Breite jetzt eben so wenig veränderlich ist als die Neigung.

Aus Freycinets Beobachtungen hat sich unbezweifelbar ergeben, dass die täglichen Variationen der magnetischen Abweichung zwischen den Wendekreisen kleiner sind als bei uns, es schien auch, als könnte man aus ihnen die Folgerung ziehen, dass sich in der südlichen Halbkugel, das Nordende einer Magnetnadel, ihre Abweichung mag östlich oder westlich seyn, in denselben Stunden gegen Ost bewege, in welchen wir sie in Europa gegen West gehen sehen, woraus Freycinet schloss, dass es Orte geben muss, wo die Abweichung gar keiner täglichen Variation unter-

liegt. Es blieb nun noch übrig zu bestimmen, ob diese Puncte im magnetischen oder im geographischen Aequator liegen. Letzteres kann nicht der Fall seyn, weil zu Rawack (0° 1½′ südl. Breite) eine tägliche Variation von 3—4 Minuten Statt findet. Man musste aber doch, um jede Ungewissheit auszuschliessen, noch innerhalb beider Aequatoren Betrachtungen anstellen. Dieses that Duperrey zu Payta südlich vom geogr. und nördlich vom mag. Aequator und fand, dass sich daselbst das Nordende der Magnetnadel wie in Europa von 8 Uhr früh bis Mittag von Ost gegen West bewegt. Diese Ablenkung ist zwar sehr klein, aber da über ihre Richtung kein Zweifel übrig blieb, so schien sie den Schluss zu rechtfertigen, dass es längs des mag. Aequators keine täglichen Variationen der Abweichung gebe. Doch haben anderwärts angestellte Beobachtungen wie z. B. an der Insel Ascension diesen Schluss nicht begünstiget, und es scheint dieses Phänomen überhaupt verwickelter zu seyn, als man anfangs glauben mag.

VIII. Einige verbesserte Instrumente.

1. Buntens Heber.

(Edinburgh Journal of Science vol. I. p. 343.)

Dieses Instrument stellt Fig. 13 vor. Es unterscheidet sich von einem gewöhnlichen Heber dadurch, dass es am oberen Theile des längeren Schenkels eine kugelförmige Erweiterung hat. Füllt man diesen Arm nebst der Erweiterung mit der Flüssigkeit an, die man

mittelst des Hebers überfüllen will, kehrt den Apparat um, und stellt ihn mit dem kürzeren Schenkel in dieselbe, so beginnt die Heberwirkung, ohne dass man zu saugen braucht.

2. Hempels Heber.

(Journal de Pharmacie. April 1824.)

Dieses von einem Berliner angegebene Instrument lässt sich noch leichter behandeln als das vorige. Es ist wie ein ganz gemeiner Heber (Fig. 14) gebaut, nur mit dem Unterschiede, dass man an den kürzeren Schenkel eine unten gekrümmte, oben trichterförmig erweiterte Röhre ansetzen, aber sie auch wieder wegnehmen kann. Taucht man den kürzeren Arm, nachdem die Hülfsröhre angesetzt worden ist, in die zu hebende Flüssigkeit, füllt durch den Trichter von derselben Flüssigkeit so viel ein, bis sie durch den längeren Arm herausfliesst, nimmt dann die Hülfsröhre weg, so beginnt der Ausfluss der zu hebenden Masse.

3. Eine andere Einrichtung des Hebers.

Denkt man sich die Hülfsröhre in Hempels Heber am längeren Arme unveränderlich befestigt, und unten mit einer kleinen Oeffnung a (Fig. 15) versehen, so erhält man einen in vielen Fällen sehr brauchbaren Heber. Taucht man das kürzere Ende in die zu hebende Flüssigkeit, hält die kleine Oeffnung a zu, füllt durch den Trichter so viel von derselben Masse ein, bis der kürzere Arm fast voll ist, lässt dann a frei, so fliesst zuerst diese Masse heraus, und ihr folgt ohne Unterbrechung die zu hebende.

4. Chevalliers camera obscura mit meniskusförmigem Prisma.

(Annales de l'industrie nationale et étrangèr. October 1825.)

Chevallier hat im Jahre 1819 der Société d'encouragement ein Prisma mit einer convexen Seite übergeben, das die Dienste einer camera obscura leistet, und Hachette, der darüber Bericht zu erstatten hatte, legte ihm als besondern Vorzug vor den gewöhnlichen Instrumenten dieser Art bei, dass es lebhaftere und reinere Bilder gibt, von dem Nachtheile frei ist, den die Brechung des Lichtes an der vorderen Seite eines Glasspiegels nach sich zieht, dauerhafter ist, als ein mit Zinnfolio belegter Spiegel, der häufig durch den Einfluss der Feuchtigkeit und anderer zufälliger Ursachen leidet, den Zeichner weniger ermüdet, und endlich wohlfeiler ist, indem ein solches Prisma nur 15 Franken kostet, während eine Linse nebst dem Spiegel gewiss den dreifachen Preis hat, weil es so schwer ist, gute Planspiegel zu machen, selbst wenn sie nur klein sind.

Seit dieser Zeit hat Chevallier sein convexes Prisma durch ein meniskusförmiges ersetzt, und dadurch nebst obigen Vortheilen noch den erreicht, dass die Bilder von der Aberration frei, und an allen Theilen gleich rein sind.

Mittelst dieses Prisma soll man Gemählde, Zeichnungen, selbst Portraite und die complicirtesten Maschinen in jedem Grade der Verjüngung nachzeichnen können, so dass dadurch ein Pantograph ganz entbehrlich wird.

Das meniskusförmige Prisma hat drei ebene Sei-

ten und zwei gekrümmte, von denen eine convex, die andere concav ist. Fig. 16 stellt es in einer Lage dar, wo man die zwei krummen Seiten und die grössere ebene sieht. Beim Gebrauche sieht die convexe Seite nach dem Objecte hin, und die concave nach dem Papier, auf dem man es nachzeichnen will. Die vom Objecte auf die convexe Seite fallenden Strahlen werden daselbst wie in einer Linse gebrochen, gelangen auf die grosse ebene Seite des Prisma, erleiden daselbst eine Reflexion, treffen dann die concave Seite, werden da wieder gebrochen, und geben so ausserhalb des Glases ein Bild auf dem Papier, das gezeichnet werden kann.

Fig. 17 und 18 zeigen dieses Instrument nach zwei auf einander senkrechten Richtungen. Es sind A Schrauben, wodurch man dem Prisma die gehörige Richtung gibt, B das Prisma selbst, C die Fassung, auf dessen Boden das Bild erscheint.

5. Ritchie's neues Photometer.

(Philosophical transact. of the royal society of London. 1825. p. 1.)

Dieses Instrument ist Fig. 19 abgebildet. Es besteht aus 2 Cylindern AB und CD, die mit Zinnfolio belegt sind, und wovon jeder 2 bis 10 oder 12 Zoll Durchmesser und ½ oder 1 Z. Höhe hat, auf einer Seite mit einer Zinnplatte, auf der anderen mittelst einer wohl polirten Glasplatte luftdicht geschlossen ist, dass dadurch 2 hohle Cylinder gebildet werden. Diese bekommen eine solche Stellung, dass ihre ebenen Flächen mit einander genau parallel und die Metallböden einander zugekehrt sind; sie werden mittelst Glasstangen in dieser Stellung erhalten. Der innere Raum je-

des Cylinders enthält eine kreisförmige Scheibe von schwarzem Papier; beide stehen mit einander mittelst einer U förmig gebogenen Glasröhre in Verbindung, die mit Karmin gefärbte Schwefelsäure enthält, am oberen Theile jedes Armes eine kleine Kugel hat und, um die Bewegung der Flüssigkeit beurtheilen zu können, mit einer Scale versehen ist. Das Ganze befindet sich auf einem verticalen Fussgestelle. Um zu sehen, ob das Instrument gehörig regulirt ist, stelle man der ebenen Glasplatte jeder der 2 Cylinder eine brennende Kerze gegenüber und ändere ihre Entfernung so lange, bis die Flüssigkeit in beiden Armen der Glasröhre auf o weiset; dreht man nun das Instrument um 180° um eine verticale Axe, damit die von einem Lichte beschienene Glasplatte nun von der andern beschienen werde, und es ändert sich der Stand der Flüssigkeit nicht, so ist alles gehörig construirt.

Die Theorie und der Gebrauch dieses Apparates ist nun sehr einleuchtend: Stellt man eine Glasdecke einem leuchtenden Körper gegenüber, so sendet er Wärme- und Lichtstrahlen zugleich auf sie. Erstere werden vom Glase zurückgehalten, die letzteren gelangen ins Innere des Cylinders, treffen das schwarze Papier, werden daselbst ihrer Leuchtkraft beraubt und in dunkle Wärmestrahlen umgewandelt, die nun nicht durch das Glas den Cylinder verlassen können, sondern die innere Luft erwärmen, sie ausdehnen, und dadurch die flüssige Säule in Bewegung setzen.

Will man die Leuchtkraft zweier Körper mit einander vergleichen, so muss man jeden derselben einer der beiden Glasflächen gegenüber stellen, und ihre Entfernungen so lange abändern, bis die Flüssigkeit

ihren ersten Stand in der Glasröhre unverändert behält, in welchem Falle sich die Leuchtkräfte verkehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen verhalten. Ritchie behauptet, eine brennende Kerze, die vom Cylinder 10, 20 bis 30 F. entfernt ist, bringe eine Bewegung der Flüssigkeit hervor, während ein erhitztes aber nicht leuchtendes Eisen, das zwanzigmal mehr Wärme von sich gibt, als die Kerze, darauf keinen Einfluss äussert. Er hofft mit einem solchen Instrument, wobei die Cylinder 2 F. im Durchmesser halten, die Wärme der Mondesstrahlen bestimmen zu können. Dieses Instrument ist im Grunde nur ein im grösseren Massstabe ausführbares Leslie'sches Differenzialthermometer.

IX. Fortschritte der Physik in der neueren Zeit.

Seit die Naturlehre den von Baco empfohlenen Weg der Erfahrung ernstlich eingeschlagen hat, ist sie zur Riesinn herangewachsen und die grösste Wohlthäterinn des Menschengeschlechtes geworden. Wiewohl sie in der neueren Zeit den Kampf noch einmal zu bestehen hatte, den sie im grauen Alterthume kämpfte und durch dessen siegreichen Ausgang sie erst zur selbstständigen Wissenschaft ward, indem sie sich von der bloss speculirenden Philosophie losriss, so hatte dieses doch nur die Folge, dass man ihre Eigenthümlichkeiten recht klar erkannte und sich die unerschütterliche Ueberzeugung gewann, nur die Erfahrung, begleitet von einer nüchternen Urtheilskraft,

und an der Hand der allmächtigen Herrscherinn, der Mathematik, könne sie jenem Ziele immer näher führen, das vielleicht in keinem Zweige des menschlichen Wissens je ganz erreicht wird. In dieser Ueberzeugung bearbeiten nun die thätigsten und geistreichsten Männer das endlose Feld der Natur, und täglich mehren sich unsere Kenntnisse und die Zahl derer, welche an der Arbeit Theil nehmen oder doch die Früchte derselben kennen lernen wollen. Für letztere insbesondere ist gegenwärtiger fortlaufende Artikel bestimmt, in dem weder eine streng chronologische noch wissenschaftliche Folge der Fortschritte der Naturlehre beobachtet werden kann, sondern der die einen Gegenstand betreffenden Erweiterungen zusammenstellt, alle in das Gebiet der Physik gehörige Gegenstände nach der Reihe betrachtet und, nachdem dieses Gebiet einmal durchwandert ist, wieder zum ersten Puncte zurückkehrt, um an den früher verlassenen Faden das neue abermals anzuknüpfen.

Versuche über Festigkeit und Elasticität nebst den daraus sich ergebenden Resultaten.

Die Grösse des Zusammenhanges fester Körper hat von jeher für viele Physiker ein grosses Interesse gehabt, und es ist bekannt, dass es weder an älteren noch an neueren Versuchen über diesen Punct mangelt. In der neueren Zeit ist vorzüglich das Eisen in dieser Hinsicht und zugleich in Bezug auf Elasticität näher untersucht worden, weil dessen Anwendung in der Architectur sehr um sich greift.

Bei den besten Versuchen dieser Art hat man

sich vorzüglich mit der Beantwortung folgender Fragen beschäftiget:

1. Wie viel Gewicht trägt ein auf bestimmte Art geformtes Stück ohne merkliche Aenderung seiner Dimensionen?

2. Wie gross ist die Aenderung der Dimensionen, die es innerhalb der Grenzen seiner vollkommenen Elasticität durch eine bestimmte Last erleidet und wie gross ist der Modulus seiner Elasticität? ein Ausdruck, den Young *) zuerst einführte, und unter dem man die Last versteht, die sich zu derjenigen, wodurch ein Körper um das Stück a comprimirt wird, so verhält, wie die ganze Länge desselben zu der Länge des Stückes a.

3. Welche Last kann es ohne Verlust eines Theils seiner Elasticität ertragen, d. i. nach deren Wegnahme keine Spur einer Formänderung mehr bemerklich ist? 4. Mit welcher Belastung wird es zerrissen, gebrochen, zerdrückt oder zerstossen? 5. Wie verhält sich das zur Trennung der Theile nöthige Gewicht zu dem, welches den kleinsten Theil seiner Elasticität zerstört?

Diese Fragen hat Duleau **) in Betreff des geschmiedeten Eisens zu beantworten gesucht. Er machte seine Versuche mit Stangen von geschmiedetem Eisen, die einzeln oder auf verschiedene Weise mit einander verbunden waren, vertical standen wie Säulen oder verticale Träger, oder horizontal auf Stützen

*) A course of lectures on natural philosophy. Vol. II. p. 46.)

**) Theoret. practische Versuche über den Widerstand und die Haltbarkeit des geschmiedeten Eisens. Uebers. von Blumhof. Leipzig 1825.

lagen, wie die Balken unter dem breternen Fussboden, einige waren gerade, andere wie ein Brückenbogen gekrümmt und zwischen zwei festen Stützen befindlich. Diese Stücke wurden mit Gewichten belastet, die zu gering waren, um ihre Elasticität ändern zu können, und ihre Formänderung untersucht. Schliesslich wurden Stangen an einem Ende in einen Schraubstock eingespannt, am anderen um einen gewissen Winkel gedreht, und dieser mit der dazu nöthigen Kraft verglichen. Die Resultate, welche aus diesen Versuchen hervorgingen, waren folgende:

Wird ein horizontal gelegter, an beiden Enden unterstützter Stab in der Mitte mit Gewichten belastet, so sind seine Biegungen, falls sie gering sind, den angebrachten Gewichten proportional.

Ein rechtwinkliger Stab von 2 Met. Länge 0,1 M. Breite und 0,01 M. Dicke (worunter man die verticale Dimension versteht) biegt sich unter 10 Kilog. Belastung um 0,01 M. und bei solchen Stäben von ungleichen Dimensionen sind die Biegungen unter demselben Gewichte im geraden Verhältnisse der Würfel der Längen und im umgekehrten der Breiten und der Würfel der Dicken.

Die grösste Biegung, die ein Stab von 2 M. Länge und 0,01 M. Dicke, ohne Aenderung seiner Elasticität erleiden kann, ist 0,02 M.; bei anderen Stäben ist diese Biegung im geraden Verhältnisse des Quadrates der Länge, und im verkehrten der Dicke desselben.

Bei einem runden Stabe von 2 M. Länge und 0,02 M. Durchmesser beträgt die Biegung unter 10 Kilogr. 0,02061 M., bei andern Stäben wächst der Wi-

derstand verkehrt wie der Würfel seiner Länge, und direct wie die vierte Potenz des Durchmessers.

Die Biegung durch das Gewicht des Stabes selbst beträgt $\frac{5}{8}$ derjenigen, welche dasselbe Gewicht in der Mitte angebracht, hervorbringen würde.

Ein horizontal liegender, an einem Ende befestigter, am anderen freier, aber mit Gewichten belasteter Stab, sinkt am freieren Ende um so viel, als die Biegung beträgt, die ein gleich breiter und dicker aber doppelt so langer, beiderseits unterstützter Stab durch ein in seiner Mitte angebrachtes doppeltes Gewicht erleidet.

Die Biegung einer solchen Stange durch ihr eigenes Gewicht ist $\frac{3}{8}$ derjenigen gleich, die dasselbe Gewicht am freien Ende hervorbringen würde.

Ein vierkantiger Stab mit scharfen Kanten leistet in der Ebene der zwei einander entgegengesetzten Kanten denselben Widerstand, wie in der Ebene einer seiner Seiten.

Ein horizontal auf zwei Stützen ruhender, an beiden Enden so befestigter Stab, dass sich diese Enden einander nähern können, sinkt durch ein in der Mitte angebrachtes Gewicht um $\frac{1}{4}$ so viel, als wenn die Enden frei gewesen wären.

Ein rechtwinkeliger parallel mit der Länge belasteter Stab widersteht so lange, bis das Gewicht, durch welches er in der kleinsten Dimension gekrümmt werden kann, direct der Breite und dem Würfel der Dicke, verkehrt dem Quadrate der Länge proportionirt ist. Für eine Stange von 1 M. Länge und 0,01 Seite beträgt dieses Gewicht 164½ Kilogr. Bei den ausgeführten Versuchen wurden Stäbe gebraucht,

bei denen das Verhältniss der Dicke zur Länge von 24 bis 100 wechselte. Ob dieses Gesetz auch noch ausserhalb dieser Grenze giltig sey, ist erst auszumachen. Einen runden Stab von 1 M. Länge und 0.01 M. Durchmesser bringt eine Belastung von 96,895 Kilogr. zum Biegen, und bei anderen Stäben steht dieses Gewicht im geraden Verhältnisse der vierten Potenz des Durchmessers und im umgekehrten des Quadrates der Länge.

Wenn bei einem am Ende gedrückten Stücke eine Extremität eingelassen oder befestiget ist, und sich die andere nur in der geraden Linie bewegen kann, welche die beiden Enden verbindet, so ist das zum Biegen nöthige Gewicht $\frac{9}{4}$ von dem, welches dazu erfordert würde, wenn das Stück nicht eingelassen wäre.

Sind beide Enden eines Stückes befestiget, so ist der an einem Ende angebrachte, zum Biegen nöthige Druck 4mal so gross als der, welcher dasselbe leistet, wenn die Enden frei sind.

Wird ein am Ende gedrücktes Stück in der Mitte unterstützt, so biegt es sich wie ein S, und das dazu nöthige Gewicht ist auch 4mal grösser als wenn das Stück ganz frei wäre.

Wenn zwei rechtwinkelige Stücke von gleichen Dimensionen so mit einander verbunden sind, dass sie durch ein Zwischenmittel in einer unveränderlichen Lage von einander gehalten werden, so verhält sich der Widerstand des Systemes in der Ebene, welche beide Stücke schneidet, wie $E^3 - e^3 : E^3$, wo E die ganze Dicke, e die des Zwischenraumes ist.

Wird ein Bogen in der Mitte belastet, so wird ein

Drittel in der Mitte platter, die anderen zwei Drittel hingegen convexer.

Der günstigste Punct, wo man einen Bogen belasten kann, ist in einem Viertel der Länge, von einem Ende an gerechnet.

Der Drehungsbogen, den eine runde an einem Ende befestigte Stange durch ein Gewicht K, welches nach der Richtung ihrer Tangente wirkt, erleidet, wird durch die Formel $11,33.Gd^4 = LKS$ ausgedrückt, wo G dieser Bogen, D der Durchmesser, L die Länge des Stabes, S der Hebelarm ist, mittelst welchem K wirkt. Für cylindrische Röhren muss man $D^4 - d^4$ statt d setzen, wo D den äusseren, d den innern Halbmesser bedeutet. Für vierkantige Stäbe gilt die Formel $16\,Gc^4 = LKS$, in welcher c die Seite des Viereckes ist; sie geht für hohle Stäbe wieder in $16\,G(C^4 - c^4) = LKS$ über.

Was Duleau in Betreff des geschmiedeten Eisens leistete, dasselbe that Tredgold *) mit Gusseisen. Er machte seine Versuche mit Eisen von verschiedenen Gusswerken, benützte auch sorgfältig die Versuche anderer und wendete alle dazu an, um mittelst Rechnung die Kraft zu bestimmen, die ein Stück von einem Quadratzoll im Durchschnitt und 1 Fuss Länge ohne bleibende Veränderung ertragen konnte, wenn es an beiden Enden unterstüzt und in der Mitte belastet wurde, und zugleich die Ausdehnung zu finden, die es durch diese Kraft erlitt. Er fand die Grösse der genannten Kraft nach einem Versuche 15300 Pf., nach drei anderen 14814 Pf., und nach

*) On cast iron. 2. edition.



wieder anderen 15160 Pf. und nach dem letzten 13333 Pf., nimmt aber die erstere Angabe als die in der Ausübung brauchbarste an.

Als Grösse der Ausdehnung, die durch eine Last von 15300 Pf. hervorgebracht wird, zeigte sich nach mehreren Versuchen $\frac{1}{1204}$, $\frac{1}{1148}$, $\frac{1}{1165}$, $\frac{1}{1107}$, $\frac{1}{1205}$, $\frac{1}{1332}$, $\frac{1}{1132}$, $\frac{1}{1361}$, der ganzen Länge.

Die Ausdehnung $\frac{1}{1204}$ wurde als Norm angenommen und darnach durch Division der Zahl 15300 der Modulus der Elasticität gefunden, als welchen sich die Grösse von 18400000 Pf. ergibt.

Tredgold suchte aus mehreren von **Reynold**, **Banks** und **Rennie** angestellten Versuchen das Verhältniss auszumitteln, welches zwischen der Kraft Statt findet, wodurch eine Stange gebogen wird, und derjenigen, wodurch der kleinste Theil ihrer Elasticität verloren geht, und fand als Mittelwerthe dieses Verhältnisses die Zahlen 2.7 : 1, 3.3 : 1, 3.4 : 1. Er liess auch Eisen von 2 verschiedenen Gusswerken, ja selbst Eisen mit Kupfer zusammenschmelzen, und untersuchte sie hierauf. Durch ersteres Mittel erhielt er eine harte brüchige Masse, bei welcher die Kraft, welche an einem den vorigen ähnlichem Stücke keine bleibende Aenderung hervorbrachte, 15390 Pf., die Verlängerung 0,0008, mithin der Modulus der Elasticität 19136000 Pf. betrug. Bei einer anderen Mischung war obige Kraft von derselben Grösse, die dadurch bewirkte Verlängerung betrug aber 0.00078 und daher der Modulus 19514000 Pf. 6 Theile Eisen und 1 Theil Kupfer gaben ein der Feile nachgebendes Product, welches durch 15390 Pf. um 0.0009 verlängert

wurde und deshalb einen Modulus von 16921000 Pf. hatte.

Tredgold bemühte sich auch die Verminderung zu bestimmen, welche eine Temperaturerhöhung an der Festigkeit des Eisens hervorbringt. Er erhitzte zu diesem Zwecke eine 3 F. lange, 1 Qdr.Z. im Durchschnitt haltende Stange aus Schmiedeeisen in einem Bade bis 212° F., hing schnell ein Gewicht von 300 Pf. daran und beobachtete die dadurch hervorgebrachte Biegung, entfernte dann das Bad, und beobachtete den Erfolg des Erkaltens, welcher darin bestand, dass die Biegung abnahm, so wie die Stange abkühlte. Als ihre Temperatur 60° F. war, hatte sich diese bis auf $\frac{3}{4}$° der zum Messen der Biegung angebrachten Scale vermindert, während sie durch Wegnahme der ganzen Belastung um 14 solche Grade abnahm. Daraus schloss er, dass die Belastung bei 60° fast um $\frac{1}{20}$ weniger Wirkung hervorbringt als bei 212° F., und dass daher die Stärke des Eisens durch Temperaturerhöhung um 212 — 60 = 152° F. fast um $\frac{1}{20}$ vermindert wird so, dass auf 1° F. ungefähr $\frac{1}{3000}$ oder auf 1°C. beinahe $\frac{1}{1700}$ kommt.

Tredgold *) richtete auch sein Augenmerk auf die Elasticität des Stahles bei verschiedenen Härtegraden. Er ertheilte einer Stahlstange nach und nach verschiedene Härtegrade, legte sie auf zwei eiserne Unterlagen, die auf einem starken Gestelle ruhten, belastete sie in der Mitte mit Gewichten, die sich ohne weitere Verrückung sanft heben liessen, und mass mit-

*) Philosophical transact. of the royal society of London. 1824. p. 1.

telst eines Winkelhebels, dessen kürzerer, wohl äquilibrirter Arm auf der Stange ruhte, während der längere über einen Quadranten spielte, die Biegung der Stange.

Er wählte zum ersten Versuche eine Stange blasigen Stahles, die 14 Z. lang, 0,95 Z. breit, und 0,375 Z. hoch war. Sie erlitt, als sie zur Härte der gewöhnlichen Feilen gebracht war, durch 54 Pf. in der Mitte eine Vertiefung von 0,02 Z., durch 82 Pf. eine von 0,03, und durch 110 Pf. eine von 0,04 Z.; auch konnte letzteres Gewicht ohne weitere Aenderung der Form der Stange einige Stunden darauf liegen bleiben. Dieselben Biegungen wurden bei derselben Belastung bemerkt, als die Härte der Stange zum Strohgelb und zu einem gleichförmigen Blau herabgestimmt ward, ja sogar, als man sie roth glühen und dann langsam erkalten liess. In letzterem Zustande bewirkte überdiess eine Last von 110 Pf. keine bleibende Formänderung, wenn man sie wegnahm. Als sie wieder gehärtet war, traten bei obigen Belastungen wieder dieselben Biegungen ein und es bewirkten überdiess 300 Pf. und 350 Pf. eine Biegung von 0,115 Z. und von 0,130 Z. Als letzteres Gewicht abgenommen wurde, behielt sie eine Biegung von 0,005 Z., die bei einer Zulage von 10 Pf. auf 0,01 Z. stieg.

Eine andere Stange von 25 Z. Länge, 0,92 Z. Breite und 0,36 Z. Höhe bekam in einem Zustande, wo sie gefeilt werden konnte, durch 18,6 Pf. in der Mitte eine Vertiefung von 0,05 Z. durch 37 Pf. stieg diese auf 0,10 Z. durch 47f P. auf 0,127 Z.

Wurde die Stange hart gemacht, so dass sie der Feile widerstand, so war der Erfolg derselbe; bei der

Härte der strohgelben Farbe bogen sie aber 47 Pf. um 0,127 Z., 85 Pf. um 0,230, 130 Pf. um 0,350, 150 Pf. um 0,490, 185 Pf. um 0,50 und 385 Pf. um 1,04 Z. Die Last von 150 Pf. brachte eine bleibende Vertiefung von 0,012 Z. herbei. Es ist daher die Elasticität des Stahles bei jedem Härtegrade nahe dieselbe. Die Kraft, welche eine bleibende Veränderung erzeugt, verhält sich beim harten Stahle zu der, welche den Bruch hervorbringt, wie 350:580 oder wie 1 : 1,66; beim strohgelben hingegen wie 150 : 385 oder wie 1 : 2,56. Tredgold zieht auch zugleich aus seinen und aus den schon früher von Rennie angestellten Versuchen den Schluss, dass der Stahl beim Härten an Kraft, einer äusseren Gewalt zu widerstehen, verliert. Nach seiner Ansicht kommt dieses daher, dass beim Härten den äussersten Theilen die Hitze schneller entrissen wird, als sie von Innen nachfolgen kann, wodurch jene mehr zusammengezogen werden, diese aber sich ausdehnen können.

Versuche über die Stärke des Eisens, in Wien angestellt *).

Die Actiengesellschaft, welche sich zur Herstellung einer Kettenbrücke in Wien bildete, schaffte eine Maschine an, mit welcher man alle zur Brücke gehörigen Eisenstangen prüfen konnte, die aus einem ungemein kräftigen Winkelhebel bestand. Mit dieser wurden unter andern auch einige interessante Versuche über die absolute Stärke eiserner Stangen angestellt. Eine solche 9 F. lange, 2 Zoll im Querschnitt haltende Stange,

*) Die Sophienbrücke etc. von Mitis. Wien 1825.

fing bei einer Belastung von 500 Centner an, sich zu dehnen, bekam kleine Querrisse an den Kanten, verlängerte sich bei vermehrter Belastung um 8 Z., bekam an einer Stelle eine Durchschnittsfläche von 1,125 Z. und riss durch eine Kraft von 800 Ct. Zwei andere gleiche Stangen wurden gleich mit 800 Ct. belastet und brachen auf der Stelle, ohne bedeutende Verlängerung, zeigten aber an der Bruchfläche, dass die Theile beim Schweissen nicht vollkommen mit einander verbunden waren. Eine vierte Stange von denselben Dimensionen, hielt bei einer Belastung von 424 Ct. noch kräftige Hammerschläge aus, riss aber bei 550 Ct. mit einem Knall; sie zeigte an der Bruchfläche eine schlackenartige Beschaffenheit. Ein durchgeglühter, 1 Q. Z. im Durchschnitt haltender, 9 Z. langer ovaler Ring verlängerte sich schon bei 400 Ct. Last, riss nach einer Ausdehnung von 15 L. unter 776 Ct. Ein zweiter gleicher Ring, der kalt gehämmert ward, zog sich bei 600 Ct. kaum um 6 L. und riss bei 643 Ct. mit einem Knall an einer Stelle, der etwas schwächer war, als der übrige Theil.

Buchanan *) untersuchte die relative Stärke einiger Balken aus Föhrenholz und Gusseisen. Dabei war vorzüglich der Apparat interessant, dessen er sich bediente. Es war ein hydrostatisches Gebläse, aus dem man die Luft herausziehen, und dadurch bewirken konnte, dass durch den äusseren Luftdruck der bewegliche Boden eines Gefässes mächtig herabgedrückt wurde. Dieser Boden wurde mit der Mitte des zu untersuchenden, an beiden Enden unterstützten Balkens, in Verbindung gebracht, um ihn zu bie-

*) Edinb. philos. journal. N. 23.

gen und zu brechen. Aus diesen Versuchen ergibt sich, dass die Querstärke von der Länge und Tiefe des Balkens und vom Querschnitte der Bruchfläche abhängt, dass sie abnimmt, wie die Länge wächst, und zunimmt wie die Tiefe. Die Biegung ist innerhalb gewisser Grenzen dem Druck proportionirt. Ein Föhrenbalken darf mit Sicherheit nur mit der Hälfte der Last beschwert werden, die ihn bricht.

Schneiden des harten Stahles und anderer harter Körper durch weiches Eisen.

Barnes, Mechanikus in den vereinigten Staaten Nordamerika's, wollte eine eiserne, am Umfange schneidende Scheibe mittelst einer Feile kleiner machen und sie mehr abrunden, und bemerkte mit Erstaunen, dass die Feile einen Einschnitt erhielt, ohne die Scheibe anzugreifen. Perkins in London wiederhohlte diesen Versuch und erhielt dieselben Resultate, als er der Scheibe eine Geschwindigkeit von 10000 F. in einer Minute gab. Er fand auch dieselbe Wirkung an den Seitenflächen der Scheibe. Später haben mehrere Gelehrte, z. B. Pleischl *) in Prag Versuche der Art und zwar auch mit kupfernen Scheiben angestellt, und man hat sogar Quarz und andere harte Steine mit Erfolg so zu schneiden versucht. Dazu gehört aber eine gewisse Geschwindigkeit der Scheibe. Diese suchten vorzüglich Darier und Colladon **) auszumitteln. Sie hielten zu diesem Zwecke gut gehärtete Grabstichel an eine wohl centrirte 7 Z. 5 L. im Durchmesser haltende Scheibe an, und fanden, dass der Grabstichel sehr leicht angriff,

*) Kastners Archiv. 1 B. S. 146.

**) Bibliotheque universelle. April 1824.

so lange die Geschwindigkeit der Scheibe weniger als 34 F. betrug; bei einer Geschwindigkeit von 34 F. 5 Z. schnitt er nicht mehr so gut, wurde aber auch nicht angegriffen, aber bei 34 F. 9 Z. Geschwindigkeit litt er schon merklich und schnitt wenig, aber bei 45 F. 1 Z. war die Wirkung der Scheibe auf ihn schon stark und wuchs fortwährend mit der Geschwindigkeit, ja wenn diese 70 F. betrug, war der Grabstichel sehr heftig, aber die Scheibe kaum merklich angegriffen. Bei einer Geschwindigkeit von 130 — 200 F. griff die Scheibe auch Achat und Bergkrystall, jedoch nicht bedeutend, an. Kupfer griff zwar nicht den gehärteten Grabstichel, aber doch eine Legirung an, die härter ist als Kupfer. Diese Einwirkung weicher Körper auf harte erklären einige aus dem durch frei gewordene Wärme bewirkten Weichwerden des ruhenden Körpers, andere aber wie z. B. Darier und Colladon *) und Allou **) nehmen an, der gedrehte Körper wirke bloss durch den Stoss, der wegen der grossen Geschwindigkeit die unmittelbar getroffenen Theile mit seiner ganzen Stärke afficirt und sich nicht der ganzen Masse mittheilen kann, gleichwie eine Flintenkugel ein leicht aufgestelltes Bret durchbohrt aber nicht umstosst. Es muss einem wirklich diese Erklärung sehr wahrscheinlich werden, wenn man bedenkt, dass der Stahl beim Schneiden seine Natur nicht ändert, dass die Wirkung der Scheibe im Augenblicke der Berührung eintritt, dass ein benetzter Grabstichel von einer Scheibe so wie ein trockener angegriffen wird, wo doch die Wärme zur Dampfbildung verwendet werden muss.

(Die Fortsetzung folgt.)

*) Biblioth. universelle. l. c. **) Annales de l'indust. nation. oct. 1825.

MATHEMATISCHE ABTHEILUNG.

I. Note über einen analytischen Lehrsatz von Cauchy.

(Bulletin des sciences par la société philomatique, 1824. p. 117 etc.)

Lehrsatz. Es seyen

(1) $f(x) = k(x-a)(x-b)(x-c)\ldots = kx^m + lx^{m-1} + \ldots + px + q$

und

(2) $F(x) = K(x-A)(x-B)(x-C)\ldots = Kx^n + Lx^{n-1} + \ldots + Px + Q$

zwei nach x geordnete Polynome, das erste vom Grade m, und das zweite vom Grade n; ferner sey R eine constante Grösse, so ist es immer möglich, zwei andere Polynome u, v; das erste vom Grade $n-1$, das andere vom Grade $m-1$ zu finden, welche der Gleichung

(3) $$uf(x) + vF(x) = R$$

entsprechen.

Beweis. Vermög der Interpolationsformel von Lagrange ist die Summe aller Producte von der Form

$$R\,\frac{(x-b)(x-c)\ldots(x-A)(x-B)(x-C)\ldots}{(a-b)(a-c)\ldots(a-A)(a-B)(a-C)\ldots} = R\,\frac{\dfrac{f(x)}{x-a}\,.\,F(x)}{f'(a)\,.\,F(a)}$$

und aller Producte von der Form

$$R\,\frac{(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-B)(x-C)\ldots}{(A-a)(A-b)(A-c)\ldots(A-B)(A-C)\ldots}$$

$$= R\,\frac{f(x)\cdot\frac{F(x)}{x-A}}{f(A)\cdot F'(A)}$$

gleich R.

Es wird also der Gleichung (3) Genüge geleistet, wenn man

$$(4)\quad u = R\left\{\frac{\left(\frac{F(x)}{x-A}\right)}{f(A)F'(A)}+\frac{\left(\frac{F(x)}{x-B}\right)}{f(B)\cdot F'(B)}+\frac{\left(\frac{F(x)}{x-C}\right)}{f(c)\cdot F'(c)}+\text{etc.}\right\}$$

und

$$(5)\quad v = R\left\{\frac{\left(\frac{f(x)}{x-a}\right)}{F(a)f'(a)}+\frac{\left(\frac{f(x)}{x-b}\right)}{F(b)f'(b)}+\frac{\left(\frac{f(x)}{x-c}\right)}{F(c)f'(c)}+\text{etc.}\right\}$$

nimmt. folglich u. s. w.

Anmerkung. Wollte man die durch die Gleichung (3) geforderten Polynome u und v direct und zwar so bestimmen, dass sie den niedrigst möglichen Grad erhalten, so bedürfte es nur der Bemerkung, dass dieser Gleichung gemäss

für $x = A,\ u = \frac{R}{f(A)}$

für $x = B,\ u = \frac{R}{f(B)}$

u. s. w.

ferner für $x = a,\ v = \frac{R}{F(a)}$

für $x = b,\ v = \frac{R}{F(b)}$

u. s. w.

wird. Man kennt also n verschiedene Werthe von u und m verschiedene Werthe von v. Hieraus folgt, dass das einfachste Polynom, welches man für u zu wählen im Stande ist,

vom Grade $n-1$, und jenes für v vom Grade $m-1$ seyn muss. Bestimmt man diese Polynome nach ihren oben erhaltenen particulären Werthen mit Hülfe der Lagrange'schen Formel, so kömmt man ebenfalls auf die Gleichungen (4) und (5).

Folgerungen aus obigem Lehrsatze.

1) Es sey

$$(6)\quad R = k^m K^n (a-A)(a-B)(a-C)\ldots\ldots$$
$$\times (b-A)(b-B)(b-C)\ldots\ldots$$
$$\times (c-A)(c-B)(c-C)\ldots\ldots$$
$$\times \text{ etc.}$$

oder was dasselbe ist:

$$(7)\quad R = k^m F(a) \,.\, F(b) \,.\, F(c) \ldots\ldots$$
$$= (-1)^{mn} K^n f(A) \,.\, f(B) \,.\, f(C) \ldots\ldots$$

Das erste der zwei Producte

$$F(a) \,.\, F(b) \,.\, F(c) \ldots\ldots$$
$$f(A) \,.\, f(B) \,.\, f(C) \ldots\ldots$$

ist offenbar eine ganze und symmetrische Function der Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, folglich eine ganze Function der Grössen

$$K, L, \text{etc.} \ldots P, Q; \frac{l}{k}, \text{etc.} \ldots \frac{p}{k}, \frac{q}{k}$$

während das zweite eine ganze Function der Grössen

$$k, l, \text{etc.} \ldots p, q; \frac{L}{K}, \ldots\ldots \frac{P}{K}, \frac{Q}{K}$$

ist. Diese Ergebnisse können zusammen nicht bestehen, wenn nicht der in der Gleichung (7) dargestellte Werth von R eine ganze Function der Grössen

$$k, l, \ldots\ldots p, q; K, L, \ldots\ldots P, Q$$

ist. Zugleich gehen unter dieser Voraussetzung die Gleichungen (4) und (5) in

$$(8) \qquad u = (-1)^{mn} K^n \frac{f(B).f(C).f(D)\ldots(B-C)(B-D)\ldots(C-D)\ldots(x-B)(x-C)(x-D).+\text{etc.}}{(A-B)(A-C)(A-D)\ldots(B-C)(B-D)\ldots(C-D)\ldots}$$

und

$$(9) \qquad v = k^m \frac{F(b).F(c).F(d)\ldots(b-c)(b-d)\ldots(c-d)\ldots(x-b)(x-c)(x-d)\ldots+\text{etc.}}{(a-b)(a-c)(a-d)\ldots(b-c)(b-d)\ldots(c-d)\ldots}$$

über. Der Zähler und Nenner des in der Gleichung (8) erscheinenden Bruches sind Functionen von A, B, C, D.... welche bei allen unter diesen Grössen vorgenommenen Vertauschungen in numerischer Beziehung gleiche und nur dem Vorzeichen nach von einander abweichende Werthe erhalten*); auch ist, wie man leicht sieht, der Zähler durch den Nenner ohne Rest theilbar; es ist daher der Quotient $\frac{u}{K^n}$ eine symmetrische und ganze Function der Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$, folglich u eine ganze Function der Grössen $k, l, \ldots p, q, K, \frac{L}{K}, \ldots \frac{P}{K}, \frac{Q}{K}$ und der veränderlichen x. Aus demselben Grunde muss v eine ganze Function der Grössen $K, L \ldots P, Q, k, \frac{l}{k}, \ldots \frac{p}{k}, \frac{q}{k}$ und der veränderlichen x seyn. Hieraus folgt, dass u und v entweder zwei ganzen

*) C. nennt sie fonctions alternées. Man sehe seinen Cours d'Analyse de l'ecole royale polytechnique. 1. Partie. Chap. III.

Functionen der Grössen x, k, l . . . p, q, K, L . . . P, Q oder zwei solchen Functionen, wovon die erste durch eine Potenz von K, und die zweite durch eine Potenz von k getheilt ist, gleich sind. Da aber R bereits eine ganze Function der Grössen, k, l . . . p, q; K, L . . . P, Q, vorstellt, und die Grössen u, v der Gleichung (3) Genüge leisten müssen, so kann die zweite Annahme nicht zugelassen werden. Erhält also R den durch die Gleichungen (6) oder (7) ausgesprochenen Werth, so sind R, u, v ganze Functionen der Grössen k, l . . . p, q; K, L . . . P, Q und der (bloss in u und v sich zeigenden) veränderlichen x. Ueberdiess erscheinen in diesen ganzen Functionen bloss ganze numerische Coefficienten.

2) Wird $k = 1$, $K = 1$ angenommen, so reduciren sich die Gleichungen (6) und (7) auf folgende

(10) $R = (a-A)(a-B)(a-C)\ldots(b-A)(b-B)(b-C)\ldots$
$\ldots(c-A)(c-B)(c-C)\ldots\ldots$

(11) $R = F(a).F(b).F(c)\ldots = (-1)^{mn} f(A).f(B).f(C)\ldots$

Dieser besondere Fall, auf welchen sich die übrigen leicht zurückführen lassen, wird in dem Memoire betrachtet, welches dem Institute am 22. Febr. 1824 übergeben wurde.

3) Sollen sich die Functionen f(x), F(x) in zwei ganze Functionen von x und y verwandeln, wovon die erste zum mten und die zweite zum nten Grade gehört, so ist es nothwendig und hinreichend, dass die Grössen k, l . . . p, q; K, L . . . P, Q ganze Functionen von y werden, welchen beziehungsweise die Ordnungszahlen 0, 1, ... m — 1, m; 0, 1, . . . n — 1, n zugehören. Dann reduciren sich die Quotienten

$$\frac{l}{y}, \ldots \frac{p}{y^{m-1}}, \frac{q}{y^m}; \frac{L}{y} \ldots \frac{P}{y^{n-1}}, \frac{Q}{y^n}$$

bei dem unendlichen Wachsen von y auf endliche Grössen, und daher gilt dasselbe auch von den Werthen von x, welche den Gleichungen

$$kx^m + \frac{l}{y} x^{m-1} + \ldots + \frac{p}{y^{m-1}} x + \frac{q}{y^m} = o$$

$$\text{und } Kx^n + \frac{L}{y} x^{n-1} + \ldots + \frac{P}{y^{n-1}} + \frac{Q}{y^n} = o$$

genügen, das heisst von den Quotienten

$$\frac{a}{y}, \frac{b}{y}, \frac{c}{y} \ldots \frac{A}{y}, \frac{B}{y}, \frac{C}{y} \ldots$$

und von dem folgenden:

$$\frac{R}{y^{mn}} = \left(\frac{a}{y} - \frac{A}{y}\right)\left(\frac{a}{y} - \frac{B}{y}\right)\left(\frac{a}{y} - \frac{C}{y}\right) \ldots$$

$$\ldots \left(\frac{b}{y} - \frac{A}{y}\right)\left(\frac{b}{y} - \frac{B}{y}\right)\left(\frac{b}{y} - \frac{C}{y}\right) \ldots$$

$$\ldots \left(\frac{c}{y} - \frac{A}{y}\right)\left(\frac{c}{y} - \frac{B}{y}\right)\left(\frac{c}{y} - \frac{C}{y}\right) \ldots \text{ etc.}$$

woraus erhellet, dass der nach den Gleichungen (6) oder (7) gebildete Werth von R eine ganze Function von y ist, deren Ordnungszahl das Product mn nicht übersteigt. Schreibt man nun unter diesen Voraussetzungen f(x, y), F(x, y) statt f(x), F(x), so verwandelt sich die Formel (3) in

$$(12) \quad uf(x, y) + vF(x, y) = R$$

wobei alle Werthe von y, welche für die Gleichungen

$$(13) \quad f(x, y) = o, \; F(x, y) = o$$

einerlei Werthe von x zulassen, auch der Gleichung

$$(14) \quad R = o$$

entsprechen.

4) Sind also zwei algebraische Gleichungen zwischen x und y von den Graden m und n gegeben, so kann man aus denselben durch Elimination von x immer eine Gleichung für y ableiten, deren Grad höchstens dem Producte mn gleichkommt. Die Bildung des ersten Theiles dieser Gleichung nach der Methode der symmetrischen Functionen unterliegt keiner Schwierigkeit.

5) Wenn die Grössen k, l ... p, q; K, L ... P, Q d. h. die Coefficienten der Polynome f(x), F(x) ganze Zahlen sind, so sind es auch die Coefficienten der mittelst der Formeln (8) und (9) bestimmten Functionen u und v, und der numerische Werth von R, welchen die Gleichung (6) oder (7) darbietet, ist gleichfalls eine ganze Zahl. Lassen sich in diesem Falle die Polynome f(x), F(x) für denselben Werth von x durch die Zahl p dividiren, so folgt aus der Formel (3), dass p auch ein Divisor der ganzen Zahl R ist; oder nach der von Gauss eingeführten Bezeichnung, wenn

(15) $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ und $F(x) \equiv 0 \pmod{p}$

so ist auch

(16) $$R \equiv 0 \pmod{p}$$

Mit Hülfe dieser letzten Formel wird man leicht alle ganzen Zahlen finden, durch welche die Polynome f(x) und F(x) zugleich theilbar sind. Die grösste dieser ganzen Zahlen, oder der grösste gemeinschaftliche ganze Theiler dieser zwei Polynome ist der numerische Werth von R selbst. Fällt derselbe = 1 aus, so haben diese zwei Polynome nie gemeinschaftliche Factoren; ist aber R = 0, so lassen sie deren unendlich viele zu.

6) Aus den oben aufgestellten Sätzen erhellet, dass

man zu mehreren ganzen Functionen von x, y, z.... deren Anzahl jene dieser veränderlichen Grössen um eine Einheit übersteigt, und deren Coefficienten ganze Zahlen sind, immer eine ganze Zahl zu finden im Stande ist, welche alle gemeinschaftlichen Divisoren dieser Polynome als Factoren enthält. Betrachtet man insbesondere drei Polynome von den Formen

$$(17)\quad F(x, y), \quad f(x) \text{ und } f(y)$$

so zeigt sich

$$(18)\ R = K^{m(m+1)}F(a,a)F(a,b)F(a,c)\ldots F(b,a)F(b,b)F(bc)\ldots \ldots F(c,a)F(c,b)F(c,c)\ldots$$

als der grösste gemeinschaftliche Divisor derselben, wobei a, b, c ... die Wurzeln der Gleichung $f(x)=o$ vorstellen.

7) Da jede Primzahl p für jeden Werth von x nothwendig ein Theiler des Binoms

$$(19)\ x^p - x = x\left(x - \cos\frac{2\pi}{p-1} - \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{p-1}\right) \times \left(x - \cos\frac{4\pi}{p-1} - \sqrt{-1}\sin\frac{4\pi}{p-1}\right) \times \ldots\ldots \text{ etc.} \times (x-1)$$

seyn muss, so folgt aus (5), dass jede ein Polynom F(x) genau theilende Primzahl p auch in dem Producte

$$(20)\ R = F(o)F\left(\cos.\frac{2\pi}{p-1} + \sqrt{-1}\sin.\frac{2\pi}{p-1}\right) F\left(\cos.\frac{4\pi}{p-1} + \sqrt{-1}\sin.\frac{4\pi}{p-1}\right)\ldots\ldots F(1)$$

genau enthalten ist, welches man, wenn das erste Glied von F(x) die Einheit zum Coefficienten hat, und

A, B, C ... die Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ bedeuten, auch auf die Form

(21) $R = \pm ABC \ldots (A^{p-1} - 1)(B^{p-1} - 1)(C^{p-1} - 1)$ etc. bringen kann. Setzt man insbesondere

$$F(x) = \frac{x^n + 1}{x + 1}$$

wobei n eine beliebige Primzahl anzeigt, so ergibt sich $R = 0$ oder $R = \pm 2$, je nachdem p von der Form $nx + 1$ ist, oder nicht. Es sind also die Primzahlen dieser Form, 2 ausgenommen, die einzigen, welche in $x^n + 1$ aufgehen, ohne Factoren von $x + 1$ zu seyn, ein bereits bekannter Satz.

8) Jede Primzahl p, durch welche die Binome $x^p - x$, und $y^p - y$ was auch immer x und y für ganze Werthe haben mögen, theilbar sind, kann in dem Polynom $F(x - y)$ nicht aufgehen, ohne in dem numerischen Werthe des zweiten Theiles der Gleichung (18) enthalten zu seyn, vorausgesetzt, dass man für a, b, c... die Wurzeln der Gleichung $x^p - x = 0$ annimmt.

II. Ueber die Formeln, welche die Potenzen des Sinus oder Cosinus eines Kreisbogens durch die Sinusse und Cosinusse der Vielfachen dieses Bogens darstellen.

Diese Formeln, welche selbst Anfängern in der höhern Analysis nicht unbekannt sind, geben uns ein merkwürdiges Beyspiel, wie lange sich selbst in der evidentesten und strengsten aller Wissenschaften Irr-

thümer erhalten können, welche sich in die Theoreme derselben durch Ausserachtlassung der genauen Erwägung aller die Rechnung begleitenden Umstände einschleichen.

Schon am Ende des vierzehnten Kapitels der Introductio in analysin infinitorum Lausannae 1748, hatte Euler das Gesetz, nach welchem die Potenzen des Sinus und Cosinus eines Bogens mit ganzen positiven Exponenten aus den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen desselben Bogens zusammengesetzt werden, auf dem Wege der Induction nachgewiesen.

In der Abhandlung „Subsidium Calculi sinuum", welche sich im 5ten Bande der Nov. Commentar. Acad. scient. imp. Petropolitanae für die Jahre 1754 und 55 befindet, versucht er die Allgemeinheit dieses Gesetzes für jeden Werth des Exponenten mit Hülfe der von ihm in das Gebiet der ersten Elemente der Analysis versetzten Moivre'schen Gleichung

$$(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \sqrt{-1}\sin n\varphi$$

zu erweisen. Zu diesem Ende lässt er

$$\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi = u$$

und $\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi = v$ seyn,

woraus folgt $2\cos\varphi = u + v$

und $2^n\cos\varphi^n = (u + v)^n$.

Der binomische Lehrsatz gibt ihm

$$2^n\cos\varphi^n = u^n + nu^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2}u^{n-2}v^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u^{n-3}v^3 + \text{etc.}$$

und durch Verwechslung von u mit v

$$2^n \cos\varphi^n = v^n + nv^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{1.2} v^{n-2}u^2$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} v^{n-3}u^3 + \text{etc.}$$

folglich, wenn diese zwei Gleichungen addirt werden,

$$2^{n+1} \cos\varphi^n = u^n + v^n + n(u^{n-2} + v^{n-2})uv$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}(u^{n-4} + v^{n-4})u^2v^2$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(u^{n-6} + v^{n-6})u^3v^3 + \text{etc.}$$

Aber es ist $uv = (\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)$
$= \cos\varphi^2 + \sin\varphi^2 = 1$

und der Moivre'schen Gleichung gemäss

$$u^n + v^n = 2\cos n\varphi;$$

daher wird

$$2^n \cos\varphi^n = \cos n\varphi + n\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)\varphi$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos(n-6)\varphi + \text{etc.}$$

Obschon Euler das übrigens allgemein gültige Moivre'sche Theorem nur für ganze positive Exponenten beweiset, so erlaubt er sich doch die für $2^n \cos\varphi^n$ erhaltene Formel auf ganze negative wie auch auf gebrochene Werthe des Exponenten n auszudehnen, welcher Meinung auch Lagrange in den Leçons sur le calcul des fonctions. Paris 1806. p. 147 etc. beipflichtet, wo er dieselbe Formel mit Hülfe der Methode der unbestimmten Coefficienten ableitet, ohne einer Beschränkung der Werthe des Exponenten zu erwähnen. Um die Formeln für $\sin\varphi^n$ zu erhalten, vertauschen beide Schriftsteller den Bogen φ mit seiner Ergänzung zum Quadranten.

Poisson hat zuerst auf die Unzulässigkeit der Formel

$$2^n \cos \varphi^n = \cos n\varphi + n \cos (n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2} \cos(n-4)\varphi + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \cos(n-6)\varphi + \text{etc.}$$

für Werthe von n, welche keine ganzen positiven oder negativen Zahlen sind, aufmerksam gemacht Er zeigte in der diesen Gegenstand betreffenden Note, welche in das Januarheft für 1811 der Correspondance sur l'ecole polytechnique (Tom. II. pag. 212) eingerückt wurde, nicht nur allein, dass diese Formel wenn n $= \frac{1}{3}$ und $\varphi = \pi$ angenommen wird, wobei π die halbe Kreisperipherie deren Halbmesser = 1 ist, anzeigt, für $\sqrt[3]{2 \cos \pi} = \sqrt[3]{-2}$ das unrichtige Resultat

$$\cos \frac{\pi}{3} + \tfrac{1}{3} \cos(\tfrac{1}{3} - 2)\pi + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3} - 1)}{1.2} \cos(\tfrac{1}{3} - 4)\pi + \text{etc.}$$

$$= \cos \frac{\pi}{3}\left(1 + \tfrac{1}{3} + \frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3} - 1)}{1.2} + \ldots\right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{3} \cdot (1 + 1)^{\frac{1}{3}} = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}$$

darbietet, sondern er berichtigte auch die oben angeführte Euler'sche Deduction derselben, deren Beschränkung auf ganze Werthe des Exponenten n darin liegt, dass die Reihen

$$(u+v)^n = u^n + nu^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2} u^{n-2}v^2 + \ldots\ldots$$

und

$$(v+u)^n = v^n + nv^{n-1}u + \frac{n(n-1)}{1.2} v^{n-2}u^2 + \ldots\ldots$$

für identische Werthe der Potenz $2^n \cos \varphi^n$ angenommen werden, während doch die Binomialformel, wenn

n keine ganze Zahl bedeutet, nur einen individuellen Werth der vieldeutigen Grösse $(u + v)^n$ und zwar nicht genau denselben angibt, je nachdem man die Entwickelung nach den steigenden oder nach den fallenden Potenzen von v vornimmt. Poisson gibt dem Ausdrucke

$$2^n \cos\varphi^n = u^n + nu^{n-1}v + \frac{n(n-1)}{1.2}u^{n-2}v^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u^{5}v^{3} + \text{etc.}$$

die Form

$$2^n \cos\varphi^n = u^n + nu^{n-2}uv + \frac{n(n-1)}{1.2}u^{n-4}u^2v^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}u^{n-6}u^3v^3 + \text{etc.}$$

woraus, wenn man die Potenzen von u nach der Moivre'schen Formel transformirt,

$$(1)\quad 2^n \cos\varphi^n = \cos n\varphi + n\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)\varphi + \ldots\ldots$$
$$+\sqrt{-1}\left\{\sin n\varphi + n\sin(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)\varphi + \ldots\right\}$$

folgt, eine Gleichung, welche sowohl für ganze als auch für gebrochene Werthe von n besteht. Vertauscht man aber bei dieser Entwickelung u mit v, so findet man

$$(2)\quad 2^n \cos\varphi^n = \cos n\varphi + n\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)\varphi + \ldots\ldots$$
$$-\sqrt{-1}\left\{\sin n\varphi + n\sin(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)\varphi + \ldots\right\}$$

welche Gleichung von (1) nur im Zeichen der Wurzelgrösse $\sqrt{-1}$ abweicht.

Jede der Formeln (1) und (2) stellt nun einen der Werthe dar, welche der Potenz $2^n \cos\varphi^n$ zukommen, wenn n keine ganze positive Zahl ist, und zwar jede einen andern; um alle Werthe der erwähnten Potenz zu erhalten, setze man alle Bogen, welche denselben Cosinus wie φ zulassen, nämlich

$$\varphi \pm 2\pi, \ \varphi \pm 4\pi, \ \varphi \pm 6\pi, \ \varphi \pm 8\pi \text{ etc.}$$

statt φ. Hiebei ist, wenn man φ sowohl positiv als auch negativ nimmt, nur eine der Formeln (1), (2) nöthig.

Bedeutet n einen rationalen Bruch, welcher, nachdem er durch die einfachsten Zahlen ausgedrückt worden ist, den Nenner m besitzt, so findet man, dass alle diese Substitutionen im Grunde nur auf m verschiedene Resultate führen, und diess sind die m Werthe, welche der Potenz $2^n \cos\varphi^n$ unter der gemachten Voraussetzung gehören.

Ist n eine ganze positive oder negative Zahl, so hat $2^n \cos\varphi^n$ bloss einen einzigen Werth; die Formeln (1) und (2) stimmen daher in diesem Falle überein, woraus

$$2^n \cos\varphi^n = \cos n\varphi + n\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\cos(n-4)\varphi + \text{etc.}$$

$$\text{und } \sin.n\varphi + n.\sin(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\sin(n-4)\varphi + \text{etc.} = 0.$$

folgt. Die Richtigkeit dieser letztern Gleichung ist, wenn n einen ganzen positiven Werth erhält, leicht einzusehen, weil dann der Ausdruck rechter Hand das Gleichheitszeichen abbricht, und je zwei vom Anfange und Ende desselben gleichweit entfernte Glieder gleiche numerische Werthe und entgegengesetzte Zeichen darbieten. Nicht so leicht fällt die Be-

schaffenheit des erwähnten Ausdruckes in die Augen, wenn n eine ganze negative Zahl ist. Hier dringt sich nun die Frage auf, was die Reihen

$$\cos n\varphi + n\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\cos.(n-4)\varphi + \text{etc.}$$

und

$$\sin n\varphi + n\sin(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\sin(n-4)\varphi + \text{etc.}$$

wohl für eine Bedeutung haben mögen, wenn n irgend eine beliebige Zahl vorstellt?

Diese Frage, welche in Bezug auf die zweite Reihe schon früher Deflers der Analyse zu unterwerfen versuchte (Lacroix Traité de calcul diff. et integral. 2 edition Tom. III. pag. 621) ist zuerst von Poinsot in einem der Pariser Akademie der Wissenschaften den 19. Mai 1823 mitgetheilten Aufsatze, welcher aber erst im J. 1825 unter dem Titel „Recherches sur l'analyse des sections angulaires" erschien, und fast zu gleicher Zeit von Dr. M. Ohm in dessen „Aufsätzen aus dem Gebiete der höhern Mathematik." Berlin 1823 IV. Abtheilung beantwortet worden. Endlich hat Poisson, welchem Poinsot's Schlüsse nicht genügten, dieselbe Frage in dem Septemberhefte des „Bulletin des sciences mathematiques etc. publié sous la direction de M. le Bon de Férussac" für das Jahr 1825 (Tome 4me dieses Bullet. pag. 141 etc.) neuerdings erörtert und dabei der Hauptsache nach den von Ohm am angeführten Orte betretenen Weg eingeschlagen. Seine Deduction ist mit einigen Abänderungen, welche dieselbe dem oben angewandten Calcul näher bringen, folgende:

Es sey für jeden beliebigen Werth von n und für jeden ganzen positiven oder negativen Werth von r

$$(3)\ Y_r = \cos n(\varphi + r\pi) + ny\cos(n-2)(\varphi + r\pi) + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}y^2\cos(n-4)(\varphi + r\pi) + \ldots$$

$$Z_r = \sin n(\varphi + r\pi) + ny\sin(n-2)(\varphi + r\pi) + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}y^2\sin(n-4)(\varphi + r\pi) + \ldots$$

wobei, damit diese Reihen convergiren, y die Einheit nicht übersteigen darf*), so ist wegen

$$\cos(n-2\rho)(\varphi+r\pi) = \cos[(n-2\rho)\varphi + nr\pi] = \cos(n-2\rho)\varphi\cos nr\pi - \sin(n-2\rho)\varphi\sin nr\pi$$

und $\sin(n-2\rho)(\varphi+r\pi) = \sin[(n-2\rho)\varphi + nr\pi] = \sin(n-2\rho)\varphi\cos nr\pi - \cos(n-2\rho)\varphi\sin nr\pi$

offenbar

$$(4)\ Y_r = Y_0\cos nr\pi - Z_0\sin nr\pi$$

$$Z_r = Z_0\cos nr\pi + Y_0\sin nr\pi\,.$$

Es ist also bloss nöthig, die Reihen

$$(5)\ Y_0 = \cos n\varphi + ny\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}y^2\cos(n-4)\varphi + \text{etc.}$$

$$Z_0 = \sin n\varphi + ny\sin(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}y^2\sin(n-4)\varphi + \text{etc.}$$

zu summiren, um im Stande zu seyn, die Summen der Reihen Y_r und Z_r anzugeben, und dabei reicht es hin, den Bogen φ zwischen die Grenzen o und π einzuschränken.

Mit Hülfe der Moivre'schen Formel ergibt sich

$$Y_0 + Z_0\sqrt{-1} = (\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^n$$

*) Die Convergenz dieser Reihen fordert überdiess, dass n zwischen -1 und $+\infty$ liege.

$$+ ny(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^{n-2}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} y^2 (\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi)^{n-4} + \text{etc.}$$
$$= \left(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi + \frac{y}{\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi}\right)^n$$
$$= [\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi + y(\cos\varphi - \sqrt{-1}\sin\varphi)]^n$$
$$= [(1+y)\cos\varphi + \sqrt{-1}.(1-y)\sin\varphi]^n$$

Setzt man
$$R = \sqrt{[(1+y)^2\cos\varphi^2 + (1-y)^2\sin\varphi^2]}$$
und $\frac{(1+y)\cos\varphi}{R} = \cos\vartheta$, $\frac{(1-y)\sin\varphi}{R} = \sin\vartheta$

wobei R eine reelle Grösse ist, welche stets positiv gedacht werden kann, und ϑ einen reellen Bogen anzeigt, so wird
$$Y_0 + Z_0\sqrt{-1} = R^n(\cos\vartheta + \sqrt{-1}\sin\vartheta)^n$$
$$= R^n(\cos\vartheta + \sqrt{-1}\sin\vartheta)$$
folglich, wenn man das Zeichen von $\sqrt{-1}$ ändert und die neue Gleichung mit der ersteren durch Addition und Subtraction verbindet,

(6) $$Y_0 = R^n \cos.n\vartheta,\ Z_0 = R^n \sin.n\vartheta$$

Hier ist, wie es der Gang der obigen Rechnung mit sich bringt, unter R^n der reelle Werth, welchen diese Potenz immer zulässt, zu verstehen.

Lässt man $\varphi = 0$ seyn, so wird der Bogen ϑ, den Werthen seines Sinus oder Cosinus gemäss ein Vielfaches der Peripherie. Aber dann ist $R = \sqrt{(1+y)^2} = 1+y$ und Y_0 verwandelt sich in die Entwickelung von $(1+y)^n$, daher muss $\cos n\vartheta = 1$ seyn; hierzu wird erfordert, dass das erwähnte Vielfache der Peripherie, wenn n ein rationaler Bruch ist, durch den Nenner

desselben getheilt werden könne. Da man aber von ϑ so viele Vielfache der Peripherie wegnehmen kann, als man will, ohne die obigen Werthe von Y_o und Z_o zu ändern, so ist es erlaubt, ϑ für einen Bogen anzunehmen, welcher mit φ zugleich verschwindet. Ist n eine mit der Einheit incommensurable Zahl, so folgt aus $\cos. n\vartheta = 1$ sogleich $\vartheta = o$.

Differenzirt man den Cosinus von ϑ, so findet man

$$\frac{d\cos\vartheta}{d\varphi} = -\frac{(1+y)\ (1-y)^2 \sin\varphi}{R^3}$$

welcher Quotient von $\varphi = o$ bis $\varphi = \pi$ negativ ausfällt; es wächst daher ϑ fortwährend, wenn φ von o angefangen bis π zunimmt; für $\varphi = \pi$ hat man $R = 1+y$, $\cos\vartheta = -1$, $\vartheta = \pi$, folglich ist für alle Werthe von φ, welche hier in Betrachtung kommen, ohne Zweifel ϑ der kleinste positive Bogen, dem der Cosinus $\frac{(1+y)\cos\varphi}{R}$ gehört. Substituirt man nun die Resultate (6) in die Gleichungen (4), so hat man

(7)
$$Y_r = R^n \cos. n\ (\vartheta + r\pi)$$
$$Z_r = R^n \sin. n\ (\vartheta + \nu\pi)$$

Man kann die veränderliche Grösse y der Einheit so nahe kommen lassen, als man will; dabei nähert sich R ohne Ende der Grenze $+2\cos\varphi$ oder $-2\cos\varphi$, folglich ϑ der Grenze o oder π, je nachdem φ kleiner oder grösser ist als $\frac{\pi}{2}$; die Reihen Y_r und Z_r aber entsprechen den Grenzen

$$\cos n\,(\varphi + r\pi) + n\cos(n-2)(\varphi + r\pi) + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)(\varphi + r\pi) + \text{etc.}$$

und

$$\sin n(\varphi+r\pi)+n\sin(n-2)(\varphi+r\pi)+\frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)(\varphi+r\pi)+\text{etc.}$$

welche durch U_r und V_r angedeutet werden mögen; es bestehen demnach für alle Werthe des Bogens φ

von o angefangen bis $\frac{\pi}{2}$

die Gleichungen

(8) $$U_r = (2\cos\varphi)^n \cos nr\pi$$

$$V_r = (2\cos\varphi)^n \sin nr\pi$$

und für alle Werthe des Bogens φ

von $\frac{\pi}{2}$ angefangen bis π

die Gleichungen

(9) $$U_r = (-2\cos\varphi)^n \cos n(r+1)\pi$$

$$V_r = (-2\cos\varphi)^n \sin n(r+1)\pi$$

durch welche die oben aufgestellte Frage vollständig beantwortet wird. Man hat in derselben unter $(\pm 2\cos\varphi)^n$ immer den reellen Werth zu verstehen, welcher dieser Potenz jederzeit zukömmt.

Setzt man in den Gleichungen (8) $r = o$, so erhält man

$$U_o = (2\cos\varphi)^n; \quad V_o = o$$

Es gilt also die Euler'sche Formel

$$(2\cos\varphi)^n = \cos n\varphi + n\cos(n-2)\varphi + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)\varphi + \ldots$$

auch für jeden nicht ganzen Werth des Exponenten n, welcher die Convergenz der Reihe nicht aufhebt, aber dann darf φ einen Quadranten nicht übersteigen. Diese

Formel bietet übrigens nur den reellen Werth der Potenz $(2\cos\varphi)^n$ dar.

Es ist leicht, aus dem reellen Werthe von $(2\cos\varphi)^n$ alle übrigen Werthe, welche dieser Potenz noch zukommen mögen, zu erzeugen, wenn man den erwähnten Werth mit allen Werthen von 1^n multiplicirt. Wir übergehen daher die aus (8) und (9) sich noch ergebenden allgemeinen Ausdrücke.

Jedoch können wir nicht unterlassen zu bemerken, dass die Poisson'sche Rechnung für $y = 1$, wegen des Verschwindens des mit $1 - y$ multiplicirten imaginären Bestandtheils, gerade die Form verliert, aus welcher die Endresultate derselben hervorgingen; daher wurden die Ergebnisse dieser Rechnung unter der Annahme $y = 1$ nach der Methode der Grenzen erschlossen. Nimmt man an dieser Schlussweise Anstand, welcher hier nicht ganz ungegründet seyn dürfte *), so vermeidet man alles Schwankende, und gewinnt überdiess noch allgemeinere Formeln, wenn man die Reihen

$$(10)\quad Y = \cos\alpha + ny\cos(\alpha+\beta) + \frac{n(n-1)}{1.2}y^2\cos(\alpha+\beta) + \ldots\ldots$$

$$Z = \sin\alpha + ny\sin(\alpha+\beta) + \frac{n(n-1)}{1.2}y^2\sin(\alpha+2\beta) + \ldots\ldots$$

nach der oben gebrauchten Methode summirt.

Man hat in diesem Falle offenbar

$$Y + Z\sqrt{-1} = (\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)\Big[1 + ny(\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta) + \frac{n(n-1)}{1.2}y^2(\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta)^2 + \ldots\Big]$$

*) Vielleicht sind die Schwierigkeiten, welche Pagani im Jännerhefte des „Bulletin des sciences Mathematiques 1826“ vorgibt, an Poissons Entwickelung der Formeln (8) und (9) gefunden zu haben, von dieser Art.

$= (\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)[1 + y\cos\beta + \sqrt{-1}.y\sin\beta]^n$

und wenn man $R = \sqrt{[1 + y\cos\beta)^2 + y^2\sin\beta^2]}$

$= [1 + 2y\cos\beta + y^2]$

$$\frac{1 + y\cos\beta}{R} = \cos\vartheta, \quad \frac{y\sin\beta}{R} = \sin\vartheta$$

seyn lässt, wobei man die reelle Grösse R immer positiv, und, weil $1 + y\cos\beta$, (so lange der numerische Werth von y, wie es die Convergenz der vorgelegten Reihen fordert, die Einheit nicht übertrifft) nicht negativ ausfällt, den Bogen ϑ immer zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ annehmen kann.

$Y + Z\sqrt{-1} = R^n (\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)\ (\cos n(\vartheta + 2\varrho\pi)$

$+ \sqrt{-1}\sin n\ (\vartheta - 2\varrho\pi))$

wobei ϱ eine bis jetzt noch unbestimmte positive oder negative ganze Zahl bedeutet, also nach gehöriger Sonderung der reellen und imaginären Theile

$$Y = R^n \cos(\alpha + n\ (\vartheta + 2\varrho\pi))$$
$$Z = R^n \sin(\alpha + n\ (\vartheta + 2\varrho\pi))$$

Die unbestimmte ganze Zahl ϱ wurde bei der Potenzirung von $\cos\vartheta + \sqrt{-1}\sin\vartheta$ nach der Moivre'schen Formel zu Hülfe genommen, um unter den im Allgemeinen mannigfaltigen Werthen der Potenz $(\cos\vartheta + \sqrt{-1}\sin\vartheta)^n$ die hier tauglichen auszuwählen.

Da Y und Z sich stetig ändern, wenn y von o angefangen bis ± 1 stetig fortschreitet; hingegen $\cos(\alpha + n(\vartheta + 2\varrho\pi))$ und $\sin(\alpha + n(\vartheta + 2\varrho\pi))$ bei jedem Wechsel von ϱ plötzliche oder sprungweise Aenderungen erleiden, so kann ϱ von y gar nicht abhängen, und es reicht hin, sin ϱ für $y = o$ auszumitteln. Unter dieser Annahme aber ist $Y = \cos\alpha$, $Z = \sin\alpha$, $R = 1$, $\vartheta = o$, also

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2n\varrho\pi)$$
$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2n\varrho\pi)$$

daher n_ρ nothwendig eine ganze Zahl. Hierdurch gehen die obigen Gleichungen in

(11) $Y = R^n \cos(\alpha + n\vartheta)$
$Z = R^n \sin(\alpha + n\vartheta)$ über.

Es sey nun $y = 1$, so wird $R = \sqrt{(2 + 2\cos\beta)} = \pm 2\cos\frac{1}{2}\beta$, wobei man das obere oder das untere Zeichen wählen wird, je nachdem $\cos\frac{1}{2}\beta$ positiv oder negativ ist; nimmt man den kleinsten Bogen zu Hülfe, dessen Cosinus und Sinus mit $\cos\beta$ und $\sin\beta$ übereinstimmen, er heisse β', so fällt β' zwischen o und $\pm\pi$ folglich $\frac{1}{2}\beta'$ zwischen o und $\pm\frac{\pi}{2}$ und man kann

$R = b\cos\frac{1}{2}\beta'$ setzen. Dann wird $\cos\vartheta = \frac{1 + \cos\beta'}{2\cos\frac{1}{2}\beta'} = \cos\frac{1}{2}\beta'$

und $\sin\vartheta = \frac{\sin\beta'}{2\cos\frac{1}{2}\beta'} = \sin\frac{1}{2}\beta'$ also $\vartheta = \frac{1}{2}\beta'$ wodurch sich, wenn man 2β statt β also auch $2\beta'$ statt β' schreibt, folgende Formeln ergeben

(12) $(\pm 2\cos\beta)^n \cos(\alpha + n\beta') = \cos\alpha + n\cos(\alpha + \cos 2\beta) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\cos(a + 4\beta) + \text{etc.}$

$(\pm 2\cos\beta)^n \sin(\alpha + n\beta') = \sin\alpha + n\sin(\alpha + 2\beta) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\sin(\alpha + 4\beta) + \text{etc.}$

aus welchen sich (8) und (9) ohne Schwierigkeit ableiten lassen.

Es erübrigt uns zur vollständigen Darlegung der neuesten diesen Gegenstand betreffenden Arbeiten der Analysten nun noch von der Entwickelung der Potenzen des Cosinus eines Bogens nach der Methode der unbestimmten Coefficienten mit Hülfe der Differenzial-Rechnung zu sprechen, was wir uns für das nächste Heft vorbehalten.

III. Note über die developpablen Flächen von Poisson.

(Nouveau Bulletin des sciences par la société philomatique. 1825. pag. 145 etc.)

Die allgemeine Gleichung der developpablen Flächen ist bekanntlich das Ergebniss der Elimination der veränderlichen Grösse α aus den beiden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} z + x\varphi\alpha + y\psi\alpha + \alpha = 0 \\ x\dfrac{d\varphi\alpha}{d\alpha} + y\dfrac{d\psi\alpha}{d\alpha} + 1 = 0 \end{array}\right\} \quad (1)$$

in welchen x, y, z die Coordinaten irgend eines Punctes der Fläche, und $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$ willkührliche Functionen von α anzeigen. *) Wegen der Anwesenheit dieser Functionen kann man die Construction einer developpablen Fläche immer zweien Bedingungen unterwerfen; man kann fordern, dass sie durch zwei gegebene Curven gehe, dass sie zwei gegebene Flächen berühre, oder dass sie durch eine Curve gehe, und eine Fläche berühre, oder endlich, dass sie eine Fläche längs einer darauf vorgezeichneten Curve berühre, wodurch sich eben so viele verschiedene Aufgaben darbieten. Gegenwärtige Note beabsichtigt, diese Probleme auf eine directere und einfachere Weise aufzulösen, als es gewöhnlich zu geschehen pflegt.

Nehmen wir erstlich an, die developpable Fläche gehe durch eine Curve, deren Gleichungen nach verrichteter Auflösung in Bezug auf x und y

*) Man sehe hierüber die neuern Lehrbücher der höheren Geometrie, unter welchen wir hier bloss „Littrow's analytische Geometrie" anführen wollen.

$$x = fz,\ y = Fz$$

geben mögen.

Diese Werthe müssen den Gleichungen (1) Genüge leisten, was auch immer z für einen Werth erhalte; man hat also

$$\left.\begin{array}{l} z + fz.\varphi\alpha + Fz.\psi\alpha + \alpha = 0 \\ fz.\frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} + Fz.\frac{d\psi\alpha}{d\alpha} + 1 = 0 \end{array}\right\} (2)$$

Eliminirt man z mit Hülfe dieser zwei Gleichungen, so ergibt sich eine Differenzial-Gleichung, welche wir durch

$$\Psi\left(\varphi\alpha, \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha}, \psi\alpha, \frac{d\psi\alpha}{d\alpha}, \alpha\right) = 0 \quad (3)$$

vorstellen. Die Functionen $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$ müssen daher entweder durch das gewöhnliche Integral, oder durch die besondere Auflösung derselben mit einander in Verbindung stehen. Da aber die zweite der Gleichungen (2) das Differenzial der ersten ist, in so fern man z als constant behandelt, so gelangt man offenbar sogleich zum Integral der Gleichung (3), wenn man in der ersten der Gleichungen (2) die Veränderliche z durch eine willkürliche Constante c ersetzt, was auf die Gleiehung

$$c + fc.\varphi\alpha + Fc.\psi\alpha + \alpha = 0$$

führt.

Wollte man jedoch die Functionen $\varphi\alpha$ und $\psi\alpha$ dieser Gleichung gemäss von einander abhängen lassen, so wäre die developpable Fläche an nichts weiter gebunden, als die gegebene Curve in dem Puncte, für welchen $z = c$ ist, zu treffen, nicht aber durch diese Curve hindurch zu gehen (d. h. sie ganz in sich zu enthalten). Es wird daher die Auflösung des vorge-

legten Problems nicht durch das gewöhnliche Integral der Gleichung (3) an die Hand gegeben *), sondern man muss sich zur Erreichung dieses Zweckes an die besondere Auflösung derselben wenden, welche man erhält, wenn man die erste der Gleichungen (2) und ihr Differenzial in Bezug auf z, nämlich die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} z + fz \,.\, \varphi\alpha + Fz \,.\, \psi\alpha + \alpha &= 0 \\ 1 + \frac{dfz}{dz}\varphi\alpha + \frac{dFz}{dz}\psi\alpha &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

durch Elimination von z mit einander verbindet. Bezeichnet man also das Resultat dieser Elimination durch

$$\Psi\,(\varphi\alpha,\ \psi\alpha,\ \alpha) = 0 \quad (5)$$

so müssen die Functionen $\varphi\alpha$ und $\psi\alpha$ dieser letztern Gleichung entsprechen.

Man könnte zu dieser Folgerung unmittelbar durch die Bemerkung gelangen, dass die Gleichungen (2) für alle Werthe von z bestehen, also nebst der ersten derselben auch noch ihr Differenzial in Bezug auf z, in so fern man α als eine Function von z betrachtet, angesetzt werden darf; ferner der Theil dieses Differenzials, welcher durch die Veränderlichkeit von α entsteht, vermög der zweiten der Gleichungen (2) verschwindet, und man somit die Gleichungen (4) vor sich hat, zwischen welchen z zu eliminiren ist. Allein es war zweckmässig, die Differenzial-Gleichung zu

*) Diese Ausschliessung des gewöhnlichen Integrals, dessen Stelle die besondere Auflösung vertritt, hat auch bei der Auflösung des allgemeinen Rectifications-Problems der Curven (Correspondance sur l'Ecole Polytechnique. tom. III. pag. 23), und bei der Ableitung der Gleichung der durch Abwickelung erzeugten Curve aus jener der abgewickelten Statt (Théorie des fonctions pag. 208).

untersuchen, welche durch Elimination von α mittelst der Gleichungen (2) erhalten wird, und ebenfalls die Auflösung der Aufgabe darbieten muss, aber auch auf den Gedanken bringen könnte, dass die Relation zwischen der Function $\varphi\alpha$ und $\psi\alpha$ eine willkürliche Constante zulasse.

Sind die Gleichungen der gegebenen Curve nicht in Bezug auf x und y aufgelösst, wie wir es vorausgesetzt haben, so gelangt man dennoch durch einfache Eliminationen zur Gleichung (5). Es seyen nämlich

$$f'(x, y, z) = 0, \quad F'(x, y, z) = 0 \quad (6)$$

diese beiden Gleichungen, so hat man, wenn man x und y als ungesonderte Functionen (fonctions implicites) von z betrachtet, und in den Gleichungen (4) $x, y, \frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}$ statt der Functionen fz, Fz und ihrer Differenzialien setzt,

$$\left.\begin{array}{l} z + x\varphi\alpha + y\psi\alpha + \alpha = 0 \\ 1 + \frac{dx}{dz}\varphi\alpha + \frac{dy}{dz}\psi\alpha = 0 \end{array}\right\} (7)$$

Die Werthe von $\frac{dx}{dz}, \frac{dy}{dz}$ lassen sich ohne Schwierigkeit mittelst der Gleichungen

$$df'(x, y, z) = 0, \quad dF'(x, y, z) = 0$$

durch x, y, z darstellen; substituirt man dieselben in der zweiten der Gleichungen (7), und eliminirt man dann x, y, z aus den Gleichungen (6) und (7), so erhält man die Gleichung (5), um welche es sich hier handelt.

Soll die developpable Fläche durch eine zweite Curve hindurch gehen, deren Gleichungen ebenfalls gegeben sind, so findet man auf dieselbe Art eine

zweite Gleichung, welche der Gleichung (5) ähnlich ist, und durch

$$\Pi(\varphi\alpha, \psi\alpha, \alpha) = 0 \quad (8)$$

bezeichnet werde. Die beiden Functionen $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$ sind also bestimmt, und die Gleichungen, aus welchen jene der developpablen Fläche hervorgeht, von allen willkürlichen Grössen frei. Um die Gleichung der developpablen Fläche selbst zu bilden, substituire man in der zweiten der Gleichungen (1) die durch $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$ und α ausgedrückten Werthe von $\frac{d\varphi\alpha}{d\alpha}$ und $\frac{d\psi\alpha}{d\alpha}$, welche sich aus den Gleichungen

$$d\,.\,\Psi(\varphi\alpha, \psi\alpha, \alpha) = 0, \quad d\,.\,\Pi(\varphi\alpha, \psi\alpha, \alpha) = 0$$

ergeben, dann schaffe man α, $\varphi\alpha$ und $\psi\alpha$ aus den Gleichungen (1), (5) und (8) weg, so erhält man eine Gleichung zwischen x, y, z, welche der durch die vorgezeichneten Curven gelegten developpablen Fläche gehört.

Dasselbe Verfahren dient zur Bestimmung jeder anderen Fläche, welche durch das System zweier mit willkürlichen Functionen versehenen Gleichungen dargestellt wird, deren eine das Differenzial der andern ist, wenn nämlich die Gleichungen eben so vieler Curven gegeben werden, durch welche die Fläche gelegt werden soll, als willkürliche Functionen vorhanden sind.

Nehmen wir nun an, die developpable Fläche, auf welche sich die Gleichungen (1) beziehen, berühre eine Fläche, deren in Bezug auf z aufgelöste Gleichung

$$z = f(x, y)$$

sey. Für alle Berührungspuncte müssen die Werthe

von z, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ beider Flächen übereinstimmen, allein vermög der zweiten der Gleichungen (1) reduciren sich die aus der ersten gefolgerten Werthe von $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ auf $-\varphi\alpha$ und $-\psi\alpha$; man hat daher

$$f(x, y) + x\varphi\alpha + y\psi\alpha + \alpha = 0$$

$$\frac{d \,.\, f(x, y)}{dx} + \varphi\alpha = 0, \quad \frac{d \,.\, f(x, y)}{dy} + \psi\alpha = 0:$$

aus welchen Gleichungen man durch Elimination von x, y, z eine Gleichung erzeugt, welche wir durch

$$\psi' (\varphi\alpha, \psi\alpha, \alpha) = 0 \qquad (9)$$

vorstellen.

Wäre die Gleichung der Fläche nicht in Bezug auf z aufgelösst, d. h. hätte sie die Form

$$f(x, y, z) = 0$$

so müsste man z als eine ungesonderte Function von x, y betrachten, und die vorhergehenden drei Gleichungen durch folgende ersetzen:

$$\left.\begin{aligned} z + x\varphi\alpha + y\psi\alpha + \alpha &= 0, \\ \frac{dz}{dx} + \varphi\alpha &= 0, \\ \frac{dz}{dy} + \psi\alpha &= 0; \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

ferner in dieselben statt $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ die Werthe substituiren, welche sich aus den Gleichungen

$$\frac{d \,.\, f(x, y, z)}{dx} = 0, \quad \frac{d \,.\, f(x, y, z)}{dy} = 0$$

ergeben, und endlich die Gleichung (9) bilden, indem man x, y, z mit Hülfe der obigen drei Gleichungen aus jener der gegebenen Fläche wegschafft.

Soll die developpable Fläche eine zweite gegebene Fläche berühren, so bilde man auf dieselbe Weise eine zweite Gleichung wie (9), welche durch

$$\pi' (\varphi\alpha, \psi\alpha, \alpha) = 0 \quad (11)$$

angezeigt werde; aus den Gleichungen (9) und (11) folgt, wie in der ersten Aufgabe, die Gleichung der verlangten Fläche: sie zerfällt in zwei Factoren, weil es im Allgemeinen zwei verschiedene developpable Flächen gibt, welche die vorhandenen zwei Flächen berühren.

Will man, dass die developpable Fläche eine gegebene Fläche berühre, und durch eine gegebene Curve gehe, so müssen die Functionen $\varphi\alpha$ und $\psi\alpha$ durch die Gleichungen (5) und (9) bestimmt werden, wovon die erste auf die Curve und die zweite auf die Fläche sich bezieht.

Verlangt man endlich die Gleichung einer developpablen Fläche, welche eine gegebene Fläche in einer darauf vorgezeicheten Curve berührt, so sey wie oben

$$f(x, y, z) = 0$$

die Gleichung der berührten Fläche, und

$$F(x, y, z) = 0$$

die Gleichung einer zweiten Fläche, welche die erstere in der erwähnten Curve schneidet. Diese zwei Gleichungen müssen mit den Gleichungen (10) für alle Puncte dieser Curve zugleich bestehen, indem man, wie oben erinnert wurde, die Werthe der in (10) erscheinenden Grössen $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ aus den Gleichungen

$$\frac{d \,.\, f(x, y, z)}{dx} = 0, \quad \frac{d \,.\, f(x, y, z)}{dy} = 0$$

ableitet. Eliminirt man daher x, y, z aus den genannten Gleichungen, so erhält man zwei Gleichungen zwischen $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$ und α, mittelst welcher die zur Bildung der Gleichung der developpablen Fläche dienenden Functionen $\varphi\alpha$ und $\psi\alpha$ bestimmt werden können.

IV. Auflösung eines Problems in Betreff des Erdmagnetismus von Poisson.

(Annales de Chimie et de Physique. Novemb. 1825 und Connaissance des tems pour 1828.)

Die magnetische Kraft der Erde hat weder an jedem Puncte ihrer Oberfläche dieselbe Richtung noch dieselbe Stärke. In demselben Orte ist die Richtung dieser Kraft täglichen und jährlichen Ungleichheiten und anderen langsamer erfolgenden und weiter sich erstreckenden Variationen unterworfen. Diese Aenderungen der Richtung, deren Gesetze und Ursache wir noch nicht kennen, zeigen sich an einer sogenannten Neigungs- und Abweichungsnadel, die in jedem Orte und zu jeder Zeit nach der Richtung der magnetischen Kraft der Erde oder ihres horizontal wirkenden Theiles folgen muss, wie immer ihre Natur und der Grad ihres Magnetismus beschaffen seyn mag. Die Intensität dieser Kraft misst man bekanntlich durch die Schwingungen einer Magnetnadel um die Lage ihres Gleichgewichtes; da aber ihre Dauer sowohl von der magnetischen Kraft der Erde zur Zeit der Beobachtung als auch vom magnetischen Zustand der Magnetnadel abhängt, so soll man immer dieselbe Magnet-

nadel und zwar bei demselben Wärmegrade anwenden, weil die magnetische Kraft derselben abnimmt, wenn die Temperatur wächst und umgekehrt. Man kann desshalb dieses Mittel nicht anwenden, um die Aenderungen der Intensität des Erdmagnetismus zu erforschen, welche erst nach Verlauf einer langen Zeit bemerkbar werden und die man desshalb **seculäre Variationen** nennen könnte, weil man nicht dieselbe Magnetnadel nach so langer Zeit wieder zu finden hoffen darf, deren man sich früher bediente, und fände man sie auch, so wäre es sehr zweifelhaft, ob sie ihren Magnetismus unverändert beibehalten. Die Schwierigkeit würde nicht minder werden, wenn man eine Stahlnadel construiren wollte, die mit einer anderen völlig identisch ist, sowohl in Betreff ihrer chemischen Beschaffenheit als des Verfahrens beim Magnetisiren. Und doch wäre es interessant, unseren Nachkommen eine sichere Methode zu hinterlassen, wodurch sie den magnetischen Zustand der Erde zu ihrer Zeit mit dem in unseren Tagen vergleichen und daraus abnehmen könnten, ob die Wirkung der Erde auf eine Boussole stärker oder schwächer geworden ist. Zu diesem Zwecke schlage ich folgendes Verfahren vor:

Man hänge eine bis zur Sättigung oder auf irgend eine andere Weise magnetisirte Nadel in ihrem Schwerpuncte frei auf, so, dass sie im Augenblicke und im Orte der Beobachtung die Richtung der magnetischen Kraft der Erde annimmt, lasse sie nach beiden Seiten des magnetischen Meridians schwingen und zähle die Anzahl der Schwingungen, welche sie in einer gegebenen Zeit macht, um daraus die Dauer einer Schwin-

gung abnehmen zu können. Dasselbe thue man auch mit einer zweiten Magnetnadel, die auf ähnliche Art aufgehängt ist. Nun bringe man beide Magnetnadeln in eine solche Lage, dass ihre Schwerpuncte in einer mit der Richtung des Erdmagnetismus parallelen geraden Linie liegen; die Längen beider Nadeln werden sich vermög des Erdmagnetismus und ihrer gegenseitigen Einwirkung nach dieser Parallelen richten. Dann versetze man abwechselnd eine der beiden Magnetnadeln ohne die andere in Schwingungen nach beiden Seiten des magnetischen Meridians, die durch die vereinigte Wirkung des Erdmagnetismus und der ruhenden Nadel erfolgen, und beobachte wieder die Dauer einer solchen Schwingung. Misst man hierauf die Entfernung ihrer Schwerpuncte und berechnet ihre Trägheitsmomente, in Beziehung auf ihre respectiven Drehungsaxen, so erhält man sieben Grössen nämlich: die Entfernung beider Schwerpuncte, die zwei Trägheitsmomente, und die Dauer von vier verschiedenen Schwingungen. Es gibt aber eine Function zwischen diesen 7 Grössen, deren Werth von den beiden, beim Versuch gebrauchten Magnetnadeln unabhängig und nur von der Intensität des Erdmagnetismus abhängig ist. Man erhält freilich nur einen angenäherten Werth von dieser Function, jedoch kann man die Annäherung so weit treiben als man will, und so immer den Ausdruck mit hinreichenden Schärfe finden, welcher der Intensität des Erdmagnetismus proportionirt ist.

Es sey nun μdx ein Element des freien magnetischen Fluidums von der Dicke dx, das in einem auf der Länge einer Magnetnadel A senkrechten Querschnitt enthalten ist, der in der Entfernung x vom

Schwerpuncte gedacht wird, und zwar gegen den Nordpol für positive, gegen den Südpol für negative Werthe von μ. Es ändert sich zwar der Werth von μ mit dem von x, man braucht aber das Gesetz, nach welchem dieses geschieht, nicht zu kennen, und es ist hinreichend, zu wissen, dass $\int \mu dx$, nach der ganzen Länge der Magnetnadel genommen, Null seyn muss, weil die beiden magnetischen Flüssigkeiten, welche mit entgegengesetzten Zeichen bezeichnet werden, in einem Magnete in gleicher Menge vorhanden sind.

Heisst man φ das Mass der magnetischen Kraft der Erde, so ist die Kraft, wodurch das Fluidum μdx des Magnets A die Richtung bekommt $= \varphi \mu dx$. Bringt man ihn um den Winkel α aus der Lage seines Gleichgewichtes, so ist das Moment der Kraft, wodurch er wieder in dieselbe zurückzukehren sucht, auf seinen Schwerpunct bezogen, in Betreff des Elementes μdx das Product aus $\varphi \mu dx$ in $x \sin \alpha$, d. i. $\varphi \mu x \sin \alpha dx$, und das Moment aller Kräfte, die den Magnet in Schwingungen versetzen $= \varphi \sin \alpha \int \mu x dx$, wobei das Integrale nach der ganzen Länge von A zu nehmen ist. Ist α sehr klein, und t die Zeit einer Schwingung, so hat man nach der Theorie des Pendels

$$t = \pi \sqrt{\frac{m}{\varphi h}} \text{ oder } \varphi h = \frac{\pi^2 m}{t^2} \quad \text{(a)}$$

wenn π das Verhältniss der Peripherie eines Kreises zu seinem Durchmesser, m das Trägheitsmoment von A in Bezug auf die durch den Schwerpunct gehende Drehungsaxe ist, und $\int \mu x dx = h$ gesetzt wird.

Haben für einen zweiten Magnet B die Grössen

k, m′, t′ dieselbe Bedeutung, wie im ersten h, m, t, so wird auch

$$\varphi k = \frac{\pi^2 m'}{t'^2} \quad (b)$$

Bringt man A und B in eine Lage, wo ihre Schwerpuncte in eine mit der Resultante des Erdmagnetismus parallele Linie zu liegen kommen, und von einander um die Grösse r entfernt sind, so werden sie durch den Erdmagnetismus und durch ihre gegenseitige Einwirkung in dieser Linie im Gleichgewichte erhalten und der Nordpol der unteren Magnetnadel wird dem Südpol der oberen zugewendet seyn. Ist nun $\mu' dx'$ dasselbe für B, was μdx für A bedeutete, so haben die beiden Querschnitte, auf welche sich diese zwei Ausdrücke beziehen, die Entfernung $r + x - x'$, und weil die ihnen inhärirenden magnetischen Kräfte abnehmen, wie das Quadrat ihrer Entfernung wächst, so bekommt man für ihre gegenseitige Wirkung den Ausdruck

$$\frac{f \mu \mu' dx dx'}{(r + x - x')^2},$$

wo f eine Constante ist, welche die Wirkung zweier freier Theile der magnetischen Flüssigkeit, jedes als Einheit angenommen, in der Entfernung = 1 ausdrückt. Bringt man A um den sehr kleinen Winkel α aus der Lage des Gleichgewichtes, so ändert sich diese Wirkung nicht merklich, und ihr Moment in Bezug auf den Schwerpunct von A ist obige Grösse, multiplicirt mit $x \sin \alpha$, und daher die Totalsumme der Momente der Kräfte, die von allen Puncten von B ausgehen, und auf alle Puncte von A wirken gleich

$$f \sin\alpha \iint \frac{\mu \mu' dx dx'}{(r + x - x')^2}.$$

wo die beiden Integrale nach der ganzen Länge von A und B zu nehmen sind. Weil die Schwingungen von A in dieser Lage durch diese Kraft, vereint mit der magnetischen Kraft der Erde hervorgebracht werden, deren Moment $\varphi h \sin \alpha$ ist, so erhält man, wenn man die Dauer einer Schwingung δ heisst,

$$\delta = \pi \sqrt{\frac{m}{\varphi h + fq}} \text{ und } \varphi h + fq = \frac{\pi^2 m}{\delta^2}$$

wo der Kürze halber

$$\iint \frac{\mu \mu' dx dx'}{(r + x - x')^2} = q$$

gesetzt worden ist. Zieht man von dieser Gleichung die Gleichung (a) ab, so wird

$$fq = \pi^2 m \left(\frac{1}{\delta^2} - \frac{1}{t^2}\right) \quad (c)$$

Lässt man eben so B unter der Wirkung des Erdmagnetismus und der zwei Magnete auf einander schwingen, nennt δ' die Dauer einer solchen Schwingung, und setzt

$$\iint \frac{\mu \mu' dx dx'}{(r + x' - x)^2} = q'$$

so bekommt man durch ein dem vorigen gleiches Verfahren

$$fq' = \pi^2 m' \left(\frac{1}{\delta'^2} - \frac{1}{t'^2}\right)$$

Entwickelt man beide Doppelintegrale nach den negativen Potenzen von r, so ist das erste Glied jeder dieser Entwickelungen gleich Null, weil

$$\int \mu dx = 0, \int \mu' dx' = 0,$$

ist. Setzt man weiter voraus, dass der Magnetismus jedes Magnetes symmetrisch um den Schwerpunct vertheilt ist, so sind auch die Ausdrücke

$\int\mu x^2dx$, $\int\mu' x'^2dx'$, $\int\mu x^4dx$, $\int\mu' x'^4dx'$ etc. gleich Null, und es verschwinden in der Entwickelung des Integrales alle Glieder, welche eine gerade Potenz von r im Nenner haben. Setzt man nun, den früheren Bedeutungen von h und k analog

$$\int\mu x^3dx = h', \quad \int\mu x^5dx = h'' \text{ etc.}$$
$$\int\mu x'^3dx' = k', \quad \int\mu x'^5dx' = k'' \text{ etc.}$$

so findet man

$$q=\frac{hk}{r^3}+\frac{4(3h'k+hk')}{r^5}+\frac{6(5h''k+10h'k'+hk'')}{r^7}+\ldots$$
$$q'=\frac{hk}{r^3}+\frac{4(3hk'+h'k')}{r^5}+\frac{6(5hk''+10h'k'+h''k)}{r^7}+\ldots$$

Diese Reihen convergiren desto mehr, je kleiner die Länge der beiden Magnetnadeln gegen die Entfernung ihrer Schwerpuncte r ist. Setzt man die gefundenen Werthe von q und q′ in die Gleichungen (c) und (d), so wird

$$\left.\begin{array}{l} fhk+\dfrac{fa}{r^2}+\dfrac{fb}{r^2}+\text{etc.}=\dfrac{m\pi^2r^3(t^2-\delta^2)}{2t^2\delta^2} \\ fhk+\dfrac{fa'}{r^2}+\dfrac{fb'}{r^4}+\text{etc.}=\dfrac{m\pi^2r'^3(t'^2-\delta^2}{2t'^2\delta'^2} \end{array}\right\}\text{(e)}$$

wo der Kürze halber gesetzt wurde

$3h'k+hk'=\frac{1}{2}a$, $5h''k+10h'k'+hk''=\frac{1}{3}b$ .....

$3hk'+hk'=\frac{1}{2}a'$, $5hk''+10h'q'+h''k=\frac{1}{3}b'$ .....,

Ist r so gross, dass man die durch r^2, r^4 etc. getheilten Glieder vernachlässigen kann, so bekommt man

$$\frac{m(t^2-\delta^2)}{t^2\delta^2}=\frac{m'(t'^2-\delta'^2)}{t'^2\delta'^2}$$

und durch Elimination der Grössen h und k aus den Gleichungen (a) und (b) folgende symmetrische Formel

$$\varphi^2 = \frac{2\pi^2 f\delta\delta' \sqrt{mm'}}{r^3 tt' \sqrt{(t^2 - \delta^2)t'^2 - \delta'^2)}}$$

die zur Bestimmung der Grösse φ wohl einfach genug wäre, aber in der Ausübung zu wenig Schärfe gewährt; denn entfernt man die zwei Magnete von einander, so vermindert man ihren gegenseitigen Einfluss auf einander, mithin auch die Differenz $t - \delta$ und $t' - \delta'$, und die unvermeidlichen Beobachtungsfehler können einen merklichen Theil dieser Differenz ausmachen. Man muss daher die beiden Magnete einander desto mehr nähern, je schwächer sie sind, und um so viel, dass die Differenzen $t - \delta$ und $t' - \delta'$ die unvermeidlichen Beobachtungsfehler stark übertreffen. Dann muss man in den Gleichungen (e) eine gewisse Anzahl ihrer ersten Glieder beibehalten, und um die Werthe von fa, fa', fb, fb' etc. bestimmen zu können den Versuch mit beiden Magneten bei verschiedenen Werthen von r wiederhohlen, wobei man für δ und δ' aber nicht für m, m', t und t' verschiedene Werthe erhält. Da jeder Versuch 2 Gleichungen (e) gibt, so kann man hieraus alle unbekannten Grössen mit Ausnahme von fhk eliminiren.

Gesetzt man habe auf diese Weise gefunden

$$fhk = \rho^2$$

wo ρ eine bekannte Grösse ist. Multiplicirt man die Gleichungen (a) und (b) Glied für Glied mit einander, und substituirt für hk den Werth $\frac{\rho^2}{f}$, so bekommt man

$$\varphi^2 = Ff$$

wenn man $\frac{\pi^2 \sqrt{mm'}}{tt'\rho} = F$ setzt, wo also auch F eine

bekannte Grösse ist. Der Werth von φ hängt also von F und f allein ab. Allein letztere Grösse ist in allen Substanzen, die des Magnetismus fähig sind, bei allen Temperaturen von derselben Grösse. Es werden daher die Werthe von F immer von derselben Grösse seyn, wenn sich φ nicht ändert, hingegen grösser oder kleiner, wenn φ zu- oder abgenommen hat, es mögen die Magnete, mit denen man die Versuche angestellt hat, aus Stahl, Eisen, Nikel etc. bestehen. Man darf nur darauf sehen, dass die Magnete nicht durch ihre gegenseitige Einwirkung die Vertheilung der magnetischen Kraft in ihnen abändern und darf daher nie Magnete aus weichem Eisen wählen.

Um den Werth von F leicht in Zahlen ausdrücken zu können, so seyen p und p′ die Gewichte der beiden Magnete A und B, λ und λ' Linien, deren Länge von der Gestalt und von den Dimensionen derselben abhängt und immer leicht zu berechnen ist; ferner sey l die Länge des einfachen Pendels, das in einer Zeiteinheit im Beobachtungsorte eine Schwingung macht; so hat man

$$m = \frac{p\lambda^2}{\pi^2 l}, \quad m' = \frac{p'\lambda'^2}{\pi^2 l'}$$

Man setze die Werthe statt m und m′ in die zweiten Glieder der Gleichungen (e) und im Ausdruck von F, der dann in folgenden übergeht

$$F = \frac{\lambda\lambda'\sqrt{pp'}}{tt'\rho\sqrt{ll'}},$$

so braucht man nur eine beliebige Einheit des Gewichtes, der Länge und der Zeit anzunehmen, um zum Zwecke zu gelangen. Das Resultat des bisher auseinander gesetzten Verfahrens wird nun darin beste-

hen, dass man sagen kann, in einer bestimmten Zeit und in einem gewissen Orte hat F einen von den Magneten A und B unabhängigen numerischen Werth. Wiederhohlt man den Versuch z. B. nach einem Jahrhundert, so wird man genau angeben können, ob sich die magnetische Kraft der Erde geändert hat oder nicht, je nachdem F einen andern oder denselben Werth hat.

Es ist nothwendig für t, t′, δ, δ' ihre nach der Grösse des Ausschlagwinkels corrigirten Werthe anzuwenden, wie dieses bei anderen Pendeln geschieht. Ferner, da der Ausschlagwinkel nicht unendlich klein ist, so wird auch die Wirkung eines Elementes von einem Magnet auf jedes Element des anderen nicht constant seyn, wie bisher vorausgesetzt wurde. Der genaue Ausdruck des Momentes der Wirkung von B auf A heisst daher

$$f \sin a \iint \frac{\mu\mu' dx dx'}{(r+x-x')^2+x^2 \sin\alpha^2}$$

für den Augenblick, wo sich A um den Winkel α von seiner ursprünglichen Lage entfernt hat; einen ähnlichen Ausdruck bekommt man auch für die Wirkung von A auf B.

Entwickelt man diese Ausdrücke nach den Potenzen von sin α, und berechnet darnach die Dauer δ und δ' der Schwingungen, so findet man, dass die ersten Glieder der Gleichungen (e) mit neuen, durch r^2, r^4 etc. dividirten Theilen vermehrt erscheinen, deren Coefficienten zu den Unbekannten fa, fa′, fb, fb′ etc. kommen. Aber da diese Unbekannten eliminirt werden müssen; so ändert sich dadurch der Werth von

fhk nicht, der nach den beobachteten Werthen von δ, δ' bestimmt wurde.

Die magnetische Kraft der Erde φ ist gleich der Kraft f, die allen magnetischen Substanzen zukömmt, multiplicirt durch einen Factor φ', der von der Vertheilung des Magnetismus im Erdsphäroide abhängt; sie kann sich daher durch eine Aenderung der Anordnung des Magnetismus und durch eine mit der Zeit erfolgende Variation des Aufeinanderwirkens der Theile des magnetischen Fluidums ändern; aber in beiden Fällen wird dieses durch den Werth von F angezeigt, den besonderen Fall ausgenommen, wenn eine dieser Grössen wächst, wie das Quadrat der anderen abnimmt. Denn setzt man $f\varphi'$ statt φ in die Gleichung (f), und theilt beide Glieder durch f, so bekömmt man

$$f\varphi'^2 = F.$$

So sorgfältig man auch immer beim Magnetisiren von A und B zu Werke gehen mag, so wird doch eine kleine Abweichung von der symmetrischen Vertheilung des Magnetismus zu beiden Seiten des Schwerpunctes Statt finden.

Desshalb sollte man in die ersten Glieder der Gleichungen (e) mit r, r^3 etc. dividirte Glieder einführen, deren Coefficienten aber so wie die der mit geraden Potenzen von r getheilten eliminirt werden müssen. Dieses hat also auf den Werth von fhk, der den beobachteten Grössen δ und δ' entspricht, keinen Einfluss, und diese Grössen hängen von r auf dieselbe Art ab, der Magnetismus mag symmetrisch um den Schwerpunct angeordnet seyn oder nicht.

Es ist klar, dass man statt frei hängender Magnete andere, z. B. horizontal schwebende, in demselben

magnetischen Meridiane befindliche, und deren eine in der Verlängerung der anderen liegt, anwenden kann, dann ist aber statt φ der horizontal wirkende Theil des Erdmagnetismus zu setzen, welcher gleich φ cosin ε ist, wenn ε die magnetische Neigung im Beobachtungsorte zur Zeit der Beobachtung vorstellt. (B.)

ZEITSCHRIFT

FÜR PHYSIK UND MATHEMATIK.

PHYSIKALISCHE ABTHEILUNG.

I. Darstellung der Untersuchungen über die Bewegung einer Magnetnadel durch Einfluss schnell bewegter, sonst unmagnetischer Metalle.

Die von Arago zuerst angeregte Untersuchung der Einwirkung einer gedrehten Metallscheibe auf die Magnetnadel, scheint vorzüglich in England die Aufmerksamkeit der Physiker auf sich gezogen, in Deutschland hingegen nicht viel Zuspruch gefunden zu haben; wenigstens ist von Versuchen deutscher Gelehrten über diesen Punct nichts bekannt geworden, und doch verdient er die grösste Aufmerksamkeit und verspricht mannigfaltige Anwendung, wie schon Arago's Vorschlag, die Stärke einer Magnetnadel mittelst einer schnell umgedrehten Metallplatte zu schätzen, lehrt. Es dürfte desshalb keine ganz überflüssige Arbeit seyn, alles, was bis jetzt über diesen Gegenstand, als den neuesten im Felde des physikalischen Wissens, geschehen ist, kurz darzustellen.

1.

Babbage's, Herschels und Christie's Versuche.

(The philosophical magazine and journal. August. 1825.)

Babbage und **Herschel** haben die zuerst von **Arago** angestellten Versuche über die Ablenkung einer Magnetnadel durch schnell gedrehte Metallplatten wiederhohlt. Sie kehrten aber auch **Arago's** Verfahren um, ertheilten einem starken hufeisenförmigen Magnet eine schnelle Bewegung, hingen über demselben Stücke von Metallen und anderen Stoffen auf und bemerkten, in wie weit sie dem Magnet folgten. Sie erhielten deutliche Zeichen von Magnetismus an Platten von Kupfer, Zink, Silber, Zinn, Blei, Spiessglanz, Quecksilber, Gold, Wismuth und Kohlenstoff, in dem Zustande, wie er bei der Bereitung des Kohlenwasserstoffgases ausgeschieden wird. Beim Quecksilber war man der gänzlichen Abwesenheit des Eisens völlig gewiss. Andere Substanzen, wie Schwefelsäure, Harz, Glas und alle die Electricität nicht oder nur wenig leitenden Stoffe zeigten keine Spur einer magnetischen Wirkung.

Um die Grösse der Einwirkung dieser Substanzen verhältnissmässig in Zahlenwerthen ausdrücken zu können, wendeten sie zwei verschiedene Methoden an; sie beobachteten nämlich die Grösse der Ablenkung der Magnetnadel, wenn sie sich in einerlei Abstand von verschiedenen, in einerlei Form gegossenen gedrehten Platten befand, oder die Dauer der Umdrehung eines Systems neutralisirter (astatisch gemachter) Nadeln, das über denselben Platten aufgehängt ward. Es ist merkwürdig, dass diese zwei Methoden den beim

Versuch angewendeten Körpern denselben Rang angewiesen, aber beständig für Zink und Kupfer entgegengesetzte Resultate lieferten, wenn man nach der angewendeten Versuchsweise eines über oder unter das andere legte.

B. und H. untersuchten auch, welchen Einfluss es bei verschiedenen Metallen hat, wenn man sie sternförmig ausschneidet, und fanden Arago's Erfahrung, dass dadurch die Wirkung geschwächt wird, bestätiget. Sie überzeugten sich auch von dem sonderbaren Factum, dass die Wirkung eines Metalles, von dem man ein Stück getrennt hat, ganz oder grösstentheils wieder hergestellt wird, wenn man dasselbe wieder daran löthet, selbst in dem Falle, wo das gebrauchte Loth eine sehr geringe magnetische Wirkung ausübt. Das Gesetz, nach welchem die Kraft abnimmt, wenn die Entfernung wächst, fanden sie nicht constant, sondern zwischen dem der zweiten und dritten Potenz der Entfernung wechselnd.

Christie hat in Betreff der Erregung des Magnetismus im Kupfer die Resultate von Herschel's Versuchen bestätiget gefunden, bei denen eine Kupferscheibe durch das Rotiren eines oder mehrerer darunter angebrachter Magnete in Bewegung gesetzt wurde. Er fand auch, dass die Wirkung gleich stark ist, es mochten die gleichnamigen oder ungleichnamigen Pole dieser Magnete unmittelbar unter den Scheiben seyn.

Von diesen Umständen schliesst Ch., dass die magnetische Kraft des Kupfers äusserst vergänglich ist. Er hat auch die Anordnung der Magnete auf das mannigfaltigste abgeändert.

Ch. ging auch darauf aus, das Gesetz zu bestimmen, nach welchem die Kraft sich vermindert, wenn der Abstand des Magnetes von der Platte wächst. Aus seinen Versuchen scheint zu folgen, dass, wenn sich eine dicke Kupferplatte unter einer kleinen Magnetnadel bewegt, die ablenkende Kraft wächst, wie die Geschwindigkeit zunimmt, und die vierte Potenz der Entfernung abnimmt, dass aber diese Kraft verkehrt wie das Quadrat der Entfernung oder wie eine nicht beständige, innerhalb der zweiten und dritten liegende Potenz wächst, wenn ein grosser Magnet unter einer dünnen Kupferplatte in Bewegung gesetzt wird. Er untersuchte auch das Gesetz der Aenderung dieser Kraft, welches Statt findet, wenn sich das Gewicht der bewegten Kupferplatten ändert. Er meint, dass für mässige Entfernungen diese Kräfte dem Gewichte der Scheibe proportionirt seyen, dass sie sich aber bei sehr kleinen Entfernungen nach einer höheren Potenz der Distanz richten.

2.

Barlow's Versuche.

(The Edinburgh philos. journal. Nr. 25.)

Barlow hatte schon vor den hier aufgezählten Versuchen an einer um ihre Axe bewegten, eisernen Kugel eine besondere Einwirkung auf die Magnetnadel beobachtet, und auch in Verbindung mit Marsh die Arago'schen Versuche wiederhohlt. Es ergaben sich dabei mehrere neue Thatsachen: Sie spannten eine Bombe von 12 Z. Durchmesser in die Docke einer Spindel, welche durch eine Dampfmaschine in Bewe-

gung gesetzt wurde und fanden, dass eine nahe daran gestellte kleine Magnetnadel stark abgelenkt wurde, so lange die Rotation der Kugel dauerte, aber wieder in ihre alte Lage zurückkehrte, wenn die Bewegung aufhörte. Sie fanden auch gewisse Positionen der Magnetnadel, in denen sie keine Ablenkung erlitt, andere wo sie nach einer, noch andere, wo sie nach entgegengesetzter Richtung abgelenkt wurde.

Die Grösse dieser Ablenkung varirte innerhalb der Grenzen von 0° — 180°, je nachdem die Lage des Magnetes bei einerlei Entfernung der gedrehten Kugel und derselben Geschwindigkeit beschaffen war. In allen Fällen brachte aber eine Aenderung in der Richtung der Rotation eine in der Richtung der Ablenkung der Magnetnadel hervor. Während der Bewegung behielt der abgelenkte Magnet seine Lage fest bei, ohne zu oscilliren oder zu zittern, kehrte aber augenblicklich zu seiner alten Richtung zurück, sobald die Bewegung aufhörte. Die Wirkung war also ganz temporär und hing einzig von der Geschwindigkeit der Bewegung ab. Als Barlow sah, dass das Eisen des Drehapparates auf das Resultat seiner Versuche störend einwirke, construirte er sich eine andere Vorrichtung und fand die Gesetze, welche die Richtung eines Magnetes für alle Fälle und alle Lagen bestimmen.

Dieser Apparat war dem Gestelle einer Electrisirmaschine mit einem Cylinder ähnlich, wo sich statt des Cylinders eine Bombe befand, deren Durchmesser 8 Z. (englisch) und deren Gewicht beiläufig 30 Pf. betrug; die Füsse des massiven Tisches, der den Apparat trug, gingen durch den Fussboden, und ruhten auf dem Grunde. Die Bewegung wurde durch eine

Kurbel mittelst zweier Räder von 18 und 3 Zoll Durchmesser hervorgebracht. Diese Kurbel konnte leicht in einer Secunde zwei Umdrehungen machen und so der Bombe eine Bewegung von 720 Umdrehungen in der Minute ertheilen.

Ein mittelst Sandballast befestigter Träger mit einer horizontalen Platte wurde nahe an den Apparat gestellt. Er hatte einen halbkreisförmigen Ausschnitt, mittelst dessen man ihn so nahe an die Bombe stellen konnte als man wollte, und er liess sich höher und niedriger machen. Es konnte ihm also auch die Magnetnadel in jeder Richtung genähert, und sowohl unter als über die Bombe gestellt werden. Mehrere im Tisch angebrachte Löcher gestatteten, das Gestell in jedes Azimuth zu stellen. Die Bombe konnte man in zweifachem Sinne um eine horizontale Axe drehen.

Als nun der Träger bis zur Axe der Bombe erhöht, und die Magnetnadel successiv in verschiedene Lagen gegen dieselbe gebracht war, sah man sie, (vorausgesetzt, dass sie gegen den Einfluss der Erde durch einen anderen Magnet geschützt war) in jedem Azimuth den Nordpol gegen die Bombe wenden, wenn der obere Theil der Bombe gegen sie herabstieg, und dass dieses mit dem Südpol geschah, wenn die Bewegung nach entgegengesetzter Richtung erfolgte.

Führte man den Magnet, (im neutralisirten Zustande) so dass er mit der Drehungsaxe parallel stand, in einem verticalen Kreise um die Bombe herum, so stellte er sich in einer Höhe von 54° über dem Horizont der Drehungsaxe der Bombe senkrecht auf die Drehungsaxe, und der Nordpol ward nach einer Rich-

tung abgelenkt, welcher der des Rotirens entgegengesetzt war. Zwischen 54° — 90° Höhe stellte er sich auch senkrecht auf die Drehungsaxe, die Ablenkung war aber der vorigen entgegengesetzt, indem der Nordpol nach der Richtung der Bewegung der Bombe auswich. Diese Richtung behielt die Magnetnadel auf der anderen Seite der Bombe bis zu einer Höhe von 54° bei, wo sie wieder die vorige Lage annahm. Unter dem Horizonte verblieb sie in derselben Richtung bis zu einer Tiefe von 54°; war sie da angelangt, so wurde ihre Lage so wie oberhalb des Horizontes geändert.

Es gab daher vier Puncte, wo der Magnet seine Richtung bei derselben Richtung der drehenden Bewegung änderte, nämlich bei 54° ober und unter dem Horizonte zu beiden Seiten der verticalen. Drehte sich die Bombe nach entgegengesetzter Richtung, so änderte sich auch die Richtung der Ablenkung der Magnetnadel, aber die Puncte, wo eine fernere Aenderung eintrat, blieben dieselben; auch war diese Wirkung unabhängig von der Richtung der Axe der Rotation, sie mochte gegen Ost und West, oder gegen Nord und Süd gestellt seyn. Es muss aber der Apparat eine Geschwindigkeit von wenigstens 600 Umdrehungen in der Minute haben, um den vollen Effect hervorzubringen. Man kann hieraus den Schluss ziehen, dass der Bombe durch die blosse Rotation ihre magnetische Kraft ertheilt wird, dass diese aber augenblicklich verschwindet, wenn die Bombe aufhört, gedreht zu werden.

Diese Arbeiten wurden im December 1824 unternommen, und erst im April 1825 erfuhr Barlow

durch Gay-Lussac die von Arago angestellten Versuche, vermöge welcher eine leichte Magnetnadel in der Nähe und über einer Kupferplatte, die man schnell um eine verticale Axe dreht, abgelenkt wird, und zwar desto mehr, je schneller die Bewegung erfolgt; und dass sie bei einer sehr schnellen Bewegung nach einigen Oscillationen sogar selbst eine ziemlich schnelle drehende Bewegung erlangt.

Um diese Versuche zu wiederhohlen, ertheilte er mittelst des Rades seiner Drehmaschine einem verticalen Träger eine Bewegung, die er auf eine Geschwindigkeit von 45 Umdrehungen in einer Secunde bringen konnte, befestigte daran eine dünne Kupferscheibe von ungefähr 10 Zoll Durchmesser, stellte 1 Zoll darüber eine 5 Z. lange, in eine Büchse eingeschlossene Magnetnadel, liess die Bewegung beginnen, und sah die Nadel um fünf Grade nach der Richtung der Rotation abweichen, konnte aber keine ganze Umdrehung derselben hervorbringen. Als er aber die Magnetnadel mittelst eines Magnetstabes zum Theile neutralisirte, erlangte sie eine bedeutend schnelle drehende Bewegung. Grössere und schwerere Kupferscheiben gaben dasselbe Resultat, ohne dass man die Magnetnadel neutralisiren durfte.

Barlow wiederhohlte hierauf einen anderen Versuch Arago's, bei dem eine Eisenplatte zwischen die Magnetnadel und die Kupferscheibe gelegt wurde, und fand, dass dadurch die Einwirkung des Kupfers gänzlich aufgehoben werde.

Dann machte er einen von Ampére zuerst angegebenen Versuch, der darin besteht, dass eine sternförmig ausgeschnittene Kupferplatte schnell gedreht

wird. Man hatte ihm berichtet, dass eine solche gar keinen Effect hervorbringt. Er fand aber, dass dieser nur im Verhältniss zur weggenommenen Masse vermindert werde.

Eine Zinkplatte gab eine etwas kleinere Wirkung als eine von Kupfer. Eine eiserne Scheibe gab aber eine viel grössere als eine kupferne.

Eine in eine Büchse eingeschlossene kupferne Nadel, die sich über einer gedrehten Kupferplatte befand, zeigte sich zwar in einer geringen Bewegung, sie war aber zu zweideutig, als dass sich die Rotation der Kupferplatte als Ursache derselben angeben liesse.

Ein sehr schwerer Hufeisenmagnet, der mittelst eines Fadens an der Zimmerdecke aufgehängt wurde, gerieth durch das Drehen der Kupferplatte in eine Bewegung um sich selbst. Vorläufig war ein papierner Schirm zwischen den Magnet und die Scheibe gelegt.

Eine Kupferplatte, die über einer anderen, bewegten Platte aus Kupfer aufgehängt war, blieb unbeweglich. Dasselbe geschah über einer Eisenplatte.

Wurde eine Magnetnadel, die etwas kürzer war, als der Durchmesser einer Kupferplatte, an eine verticale Axe befestiget und schnell gedreht, und darüber eine Kupferplatte aufgehängt, so begann diese sich zu drehen. Ein Schirm von Papier trennte den Magnet von der Platte. Wurde die Scheibe in einer verticalen Ebene gedreht, und eine Magnetnadel nahe daran gestellt, so erfolgte keine Bewegung derselben, als aber letztere fast ganz neutralisirt, und ein Pol derselben gegen die Platte gerichtet war, wurde er nach der Richtung der Rotation abgelenkt, er

mochte der Nord- oder Südpol seyn; in der Richtung der verlängerten Drehungsaxe erlitt er aber gar keine Bewegung.

Barlow glaubt alle diese Erscheinungen erklären zu können, wenn er im Kupfer und in den anderen Metallen, an denen man eine Einwirkung auf eine Magnetnadel bemerkt, oder die von ihr afficirt werden, eine geringe magnetische Kraft annimmt. Er suchte seine Theorie durch einen Versuch zu beweisen, bei dem die Rotation keine Rolle spielt. Er neutralisirte eine Magnetnadel mit grösster Sorgfalt, und brachte nahe an einem ihrer Pole das Ende eines cylindrischen Kupferstabes. Der Einfluss war evident, denn die Magnetnadel bewegte sich um einige Grade. Wenn er den Stab wegzog, und ihn ihr, als sie beim Oscilliren wieder zurückkam, neuerdings näherte, brachte er sie noch um einige Grade weiter; in kurzer Zeit verwandelte sich die Abweichung in eine Rotation, und wurde durch die abwechselnden Annäherungen sehr schnell. Zwei oder drei andere Stücke von Kupfer gaben dieselbe Wirkung, während andere von derselben Gestalt und Grösse wenig oder gar keinen Effect hervorbrachten.

Merkwürdig ist noch ein Versuch von Sturgeon in Woolwich. Es wurde eine dünne Kupferscheibe von 5—6 Z. Durchmesser sehr leicht beweglich an eine Axe befestigt, und an einem Puncte ihres Umfanges ein kleines Gewicht angebracht, um ihr eine Neigung zum Oscilliren beizubringen; hierauf wurde der schwerere Theil bis zur Höhe der Axe gehoben, ausgelassen, und dann die Anzahl der Schwingungen gezählt, bis sie wieder in Ruhe kam.

Hierauf wurde derselbe Versuch wiederhohlt, während sich der schwerere Theil der Scheibe zwischen den Polen eines hufeisenförmig gebogenen Magnetes befand. Da war die Anzahl der Schwingungen wenigstens um die Hälfte grösser, als im vorigen Falle. Der Versuch ist der umgekehrte von dem, welchen Arago anstellte, und der zeigte, dass die Anzahl der Schwingungen einer Magnetnadel durch die Nähe von Scheiben aus Kupfer oder anderen Metallen vermindert wird.

Wenn man statt eines hufeisenförmig gebogenen Magnetes zwei Magnetstäbe mit ihren entgegengesetzten Polen anwendete, war die Wirkung dieselbe, während man fast keinen Effect bemerken konnte, wenn gleichnamige Pole gebraucht wurden. Dieses Resultat ist desshalb wichtig, weil es beweiset, dass die Einwirkung auf die Magnetnadel nicht von einer Art Widerstand eines Mittels abhängt.

3.
Versuche von Prevost und Colladon.

(Biblioth. univers. Aout. 1825. p. 316)

Die Versuche wurden mit einem Apparate angestellt, welcher dem Arago's ähnlich war. Nebst mehreren Versuchen, welche die englischen Physiker anstellten, wurden auch mehrere eigenthümliche gemacht, welche die Bekanntmachung verdienen:

Eine Scheibe, die aus spiralförmig gewundenem dicken Kupferdraht gebildet war, übte eine bedeutend kleinere Wirkung auf eine Magnetnadel aus, als eine ganze Scheibe desselben Metalls, bei derselben Grösse und einerlei Gewicht.

Eine mit Blei umgebene Glasplatte, ein Zinnplätt-

chen, das auf Holz ausgebreitet war, lenkten die Magnetnadel merklich ab. Holz oder Schwefel allein brachten keine wahrnehmbare Wirkung hervor. Dasselbe war mit Tritoxyd des Eisens der Fall.

Eine hart gehämmerte Kupferplatte wirkte stärker als eine ausgeglühte.

Ein Schirm aus Kupfer, oder aus Kupfer und Zink, der zwischen die Magnetnadel und die gedrehte Scheibe gestellt wurde, verminderte ihre Wirkung, ohne sie ganz aufzuheben, und zwar desto mehr, je dicker er war, und je näher er der Magnetnadel stand. Ein gläserner Schirm blieb ohne Einfluss.

War der metallene Schirm mit einer Oeffnung versehen, deren Durchmesser der Länge der Magnetnadel glich, so war sein Effect beinahe derselbe.

Ein im Mittelpuncte eines kupfernen Cylinders vertical aufgehängter Magnet blieb unbeweglich, man mochte den Ring nach was immer für einer Richtung und mit was immer für einer Geschwindigkeit drehen.

Stellte man zwei ähnliche und gleich magnetisirte Nadeln in demselben Sinne neben einander, so wuchs ihre Ablenkung; kehrte man diese Nadeln um, so dass sie ihre ungleichnamigen Pole einander zukehrten, so hörte alle Wirkung völlig auf.

Wurden zwei kleine, ähnliche Magnete an den Extremitäten eines kleinen, horizontalen Hebels befestiget, so dass die gleichnamigen Pole einerlei Richtung hatten, so drehte sich dieses System über einer rotirenden Scheibe in demselben Sinne, wie die Scheibe. Wurde aber einer dieser Magnete umgekehrt, so hörte alle Wirkung völlig auf.

Eine Magnetnadel, die so magnetisirt ist, dass

ihre Enden gleichnamige Pole bekommen, ist gegen bewegte Scheiben am empfindlichsten unter allen. Diese wurden auch von P. und C. bei den delicatesten Versuchen angewendet.

Aus diesen Versuchen schliessen P. und C., dass die genannten Wirkungen höchst wahrscheinlich von einer vorübergehenden Magnetisirung der Platten durch den Magnet hervorgebracht werden. Sie erklären so die Wirkung eines Schirmes, die Verminderung des Effectes in einer durchbrochenen Scheibe, und die Unempfindlichkeit eines Apparates, der aus zwei Magneten gebildet ist, deren gleiche Pole entgegengesetzte Richtungen haben.

Der in Scheiben von Kupfer und anderen Metallen entwickelte Magnetismus kann sich nicht so schnell ändern, als die Punçte der Scheibe beim Drehen ihren Platz wechseln; die durch den Einfluss des Magnetes gebildeten Pole kommen schief gegen die Magnetnadel zu stehen, bevor sie geändert werden, und ziehen sie daher nach der Richtung der Bewegung an.

Bei Versuchen, die angestellt wurden, um den Einfluss der Geschwindigkeit und der Entfernung der Scheiben zu bestimmen, zeigte sich, dass die Ablenkungswinkel, und nicht ihre Sinusse, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen, im geraden Verhältnisse mit der Geschwindigkeit zunehmen, und dass die Sinusse der Ablenkungswinkel im verkehrten Verhältnisse mit der 2,2ten Potenz der Entfernung wachsen. Sie trugen Sorge, bei dieser Bestimmung Scheiben anzuwenden, deren Durchmesser gegen die Länge der Magnetnadel sehr gross war.

4.
Nobili's und Bacelli's Versuche.

(Biblioth. univers. Janvier. 1826.)

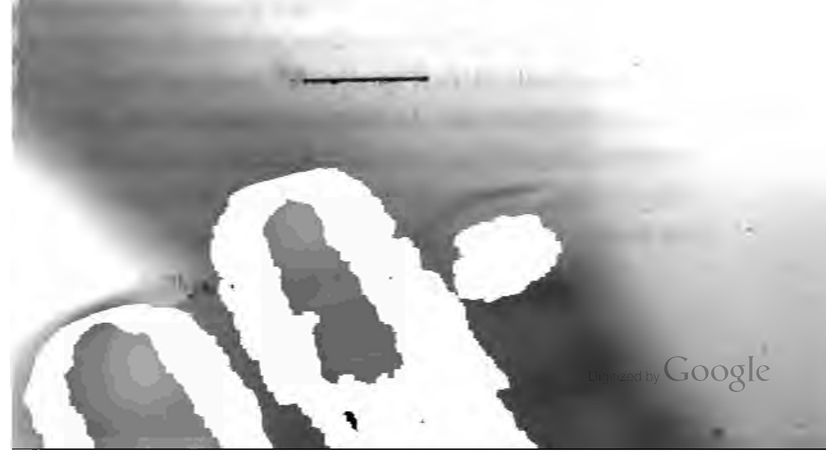
Nobili hat in Verbindung mit Bacelli eine Reihe von Versuchen über den Magnetismus des Kupfers und anderer Substanzen angestellt. Sie versuchten zuerst den Einfluss einer Kupferplatte auf die Schwingungen einer Magnetnadel, und fanden Arago's Erfahrung bestätiget: nur schien ihnen die Verminderung der Anzahl der Schwingungen nicht sehr bedeutend. Sie fanden, dass die grössten Differenzen bei den ersten und daher grössten Oscillationen Statt finden. So verlor eine Magnetnadel, die um 90° aus der Lage ihres Gleichgewichtes gebracht war, erst nach 12 Doppelschwingungen 30°, oscillirte sie aber in der Nähe einer Kupferplatte, so war der Verlust schon nach drei Oscillationen eben so gross; dann aber verminderte sich diese Differenz sehr schnell und die Zahl der Schwingungen ohne Einfluss des Kupfers verhielt sich zu der unter seinem Einfluss erfolgenden fast immer, wie 3 : 2.

Sie untersuchten auch die Wirkung verschiedener bewegter Metalle, indem sie aus ihnen Scheiben von gleichen Dimensionen verfertigten, welche mittelst Schrauben an einen Drehapparat angemacht wurden. Mittelst einer Kupferplatte gelang es ihnen leicht, mehrere Magnetnadeln umzukehren, besonders, wenn sie astatisch gemacht waren.

Um verschiedene Metalle zu vergleichen, merkten sie die Grösse der Ablenkung an, die sie bei gleicher Umdrehungsgeschwindigkeit, Entfernung etc. an ei-

aber dieses Statt finde, muss sie in mässiger Entfernung von der Eisenplatte angebracht seyn, denn wenn sie zu nahe ist, so hängt sie sich an einen Punct des Umfanges der Scheibe an. Die Beschleunigung in Coulombs Versuchen rührt daher, dass sich die Kraft der zwei Magnete mit der des Erdmagnetismus vereiniget, um die Cylinder in die Lage ihres Gleichgewichtes zu bringen, während die Verzögerung einer Magnetnadel über einer Eisenplatte darin ihren Grund hat, dass der Erdmagnetismus in jedem Augenblicke dem entgegengesetzt ist, welcher durch die Pole der Magnetnadel in dem Puncte der Eisenscheibe erregt wird, der sich gerade unter ihr befindet. Dieser Magnetismus ist zwar immer nur von kurzer Dauer, aber doch hinreichend, um die Magnetnadel zu hindern, ihren Platz zu verlassen.

N. und B. glaubten beim Beginn ihrer Versuche mit mehreren anderen Physikern, dass die von Arago entdeckten Thatsachen auf irgend einem Widerstande beruhen, den nicht magnetische Körper auf magnetische ausüben; sie änderten aber ihre Meinung aus mehreren Gründen, vorzüglich desshalb, weil unter der Voraussetzung eines solchen Widerstandes auch in Coulombs Versuchen eine Verzögerung statt einer Beschleunigung hätte eintreten müssen.



Kupferscheibe Quecksilber aus, durch welches vom Centrum gegen die Peripherie ein electrischer Strom geleitet wurde, construirten bewegliche Leiter von verschiedener Form, und astatische Spiralen, die zwei dem Einfluss des Erdmagnetismus entzogene Magnetnadeln vorstellten, erhielten aber keine Spur einer Bewegung. Es war aber der electrische Strom sehr schwach und kam bloss von einem nach Wollaston's Angabe eingerichteten Elemente von 75 Q. Zoll Oberfläche.

Mit diesen von Arago zuerst angestellten Versuchen haben (nach Nobili) die von Coulomb über den Magnetismus mehrerer organischer und unorganischer Stoffe viele Aehnlichkeit, und es scheint, als liege beiden dieselbe Ursache zu Grunde. Die kleinen Cylinder, welche Coulomb zwischen den gleichnamigen Polen zweier mächtiger Magnete oscilliren liess, machten in dieser Richtung mehrere Schwingungen, als wenn die Magnete entfernt waren.

Es erklärt sich diese Zunahme der Schwingungen, wenn man annimmt, dass die Cylinder von den zwei Magneten etwas Magnetismus bekamen, und wiewohl in Arago's erstem Versuch eine Magnetnadel über Kupfer langsamer schwingt als ohne dieses, so steht diese Verzögerung doch mit der vorigen Beschleunigung in keinem Widerspruche, sondern erklärt sich auf dieselbe Weise, durch die Annahme, dass das Kupfer unter der Magnetnadel etwas magnetisirt ist. Denn lässt man einen Magnet über einer weichen Eisenscheibe oscilliren, so erfolgen die Schwingungen mit ausnehmender Langsamkeit und die Magnetnadel kommt nach wenigen Schwingungen zur Ruhe. Damit

aber dieses Statt finde, muss sie in mässiger Entfernung von der Eisenplatte angebracht seyn, denn wenn sie zu nahe ist, so hängt sie sich an einen Punct des Umfanges der Scheibe an. Die Beschleunigung in Coulombs Versuchen rührt daher, dass sich die Kraft der zwei Magnete mit der des Erdmagnetismus vereiniget, um die Cylinder in die Lage ihres Gleichgewichtes zu bringen, während die Verzögerung einer Magnetnadel über einer Eisenplatte darin ihren Grund hat, dass der Erdmagnetismus in jedem Augenblicke dem entgegengesetzt ist, welcher durch die Pole der Magnetnadel in dem Puncte der Eisenscheibe erregt wird, der sich gerade unter ihr befindet. Dieser Magnetismus ist zwar immer nur von kurzer Dauer, aber doch hinreichend, um die Magnetnadel zu hindern, ihren Platz zu verlassen.

N. und B. glaubten beim Beginn ihrer Versuche mit mehreren anderen Physikern, dass die von Arago entdeckten Thatsachen auf irgend einem Widerstande beruhen, den nicht magnetische Körper auf magnetische ausüben; sie änderten aber ihre Meinung aus mehreren Gründen, vorzüglich desshalb, weil unter der Voraussetzung eines solchen Widerstandes auch in Coulombs Versuchen eine Verzögerung statt einer Beschleunigung hätte eintreten müssen.

II. Neue Versuche über die Bewegung einer Magnetnadel durch schnell rotirende Metalle, von A. Baumgartner.

Aus der vorausgeschickten Darstellung sieht man, es haben sich viele ausgezeichnete Physiker mit der Untersuchung der Einwirkung schnell bewegter Metalle auf eine Magnetnadel beschäftigt, und die Versuche über diesen Punct so vielfach abgeändert, dass auf den ersten Blick in dieser Hinsicht nicht mehr viel übrig zu seyn scheint. Es haben aber überhaupt physikalische Versuche über einen neuen Gegenstand das Eigenthümliche an sich, dass sie einen zur Annahme einer bestimmten theoretischen Ansicht reitzen, nach der man sich dann den Plan zu weiteren experimentellen Untersuchungen entwirft, und so von einem Experimente zum anderen gleichsam fortgerissen wird. Auf diesem Wege gelangte ich zur Kenntniss einiger Thatsachen, die ich für neu, und desshalb der Bekanntmachung nicht ganz unwerth halte.

Ich bediente mich bei meinen Versuchen zweier verschiedener Drehapparate. Der eine diente bloss dazu, eine nicht gar grosse Metallplatte in eine schnelle und anhaltende drehende Bewegung zu versetzen, ohne die Geschwindigkeit derselben genau bestimmen zu können, und ist in Fig. 1 nach dem auf der Ebene der sich drehenden Metallplatte senkrechten Durchschnitte abgebildet. Die Metallplatte a ist an die Axe einer kleinen Rolle b angeschraubt, und mit dieser in eine hölzerne, mit einem Handgriff versehene Rah-

me eingesetzt, wovon sich ein Seitenstück c bei d um eine Charnier bewegen lässt, damit man die ganze Rahme öffnen, und die Platte nach Belieben wechseln kann. Soll sie in Bewegung gesetzt werden, so nimmt man einen langen Faden, macht daran eine Schlinge, hängt sie an einem eigends dazu bestimmten Stift der Rolle b, und wickelt den Faden durch Umdrehen der Metallscheibe auf, bis nur ein kurzes Stück davon übrig ist. Zieht man nun an diesem Stücke schnell und so stark an, dass der ganze Faden von der Rolle frei wird, so erlangt die Scheibe eine Geschwindigkeit, mit der sie mehr als 40 Umdrehungen in einer Secunde zu machen im Stande ist.

Wenn die Anzahl der Umdrehungen gemessen werden sollte, oder der Versuch mit grösseren Platten zu machen war, als obige Rahme erlaubte, so bediente ich mich einer Vorrichtung, bei welcher ein hölzernes, mit einer Kurbel versehenes Rad, dessen Axe vertical stand, mit einem kleineren, etwa $2\frac{1}{2}$ F. davon entfernten, mittelst einer Schnur ohne Ende in Verbindung war. Während einer Umdrehung des grösseren Rades drehte sich das kleinere achtmal. Das grössere Rad liess sich leicht nach dem Schlage eines nahe dabei befindlichen Secundenpendels drehen, und so konnte die Anzahl der Umdrehungen einer an der verticalen Axe des kleineren Rades befestigten Metallscheibe genau bekannt werden.

Da ich Anfangs nur die Absicht hatte, mir die einfachen Erscheinungen, welche von anderen angegeben wurden, vor Augen zu stellen, so bediente ich mich auch nur einer gewöhnlichen Magnetnadel, weil ich aber an ihr mittelst des kleinen oben beschriebe-

nen Apparates keine volle Umdrehung derselben hervorbringen konnte, so nahm ich zu einem starken Hufeisenmagnete meine Zuflucht, der mittelst eines etwa 4 Schuh langen Fadens frei aufgehängt war, und versetzte ihn durch die Nähe einer schnell bewegten Kupferscheibe von 6 Z. Durchmesser und ½ L. Dicke in eine ziemlich schnelle drehende Bewegung.

Minder auffallend war ein ähnliches Phänomen, das ich an einem prismatischen, 16 Zoll langen, und 4½ Q. Linien im Durchschnitte haltenden, stark magnetisirten Eisenstab hervorbrachte, der auf ähnliche Weise aufgehängt war.

Wären diese Erscheinungen auch die einzigen in diesem Gebiete, so würden sie schon hinreichen, um auf den Gedanken zu bringen, die Ablenkung der Magnetnadel sey die Wirkung des in der Metallplatte durch Vertheilung erregten Magnetismus, von welcher Seite auch die berühmtesten Physiker, welche sich mit diesem Gegenstande befassten, ihn zu betrachten pflegen.

Es ist nur noch die Frage, ob die durch Wirkung des Erdmagnetismus oder die durch die nahe Magnetnadel erzeugte magnetische Vertheilung der Metallplatte die Hauptrolle spiele. Zur Beantwortung dieser Frage wurde eine sehr genaue, vom hiesigen Universitäts-Mechanikus Hanaczik verfertigte, astatische Magnetnadel nach Ampère's Angabe in die Stellung gebracht, in welcher sie gegen den Erdmagnetismus geschützt war, und derselben eine Kupferplatte genähert, die sich im magnetischen Aequator bewegte, mithin auch durch den Erdmagnetismus nicht afficirt werden konnte. Alsogleich erfolgte eine starke Bewe-

gung der Magnetnadel, zum Beweise, dass die magnetische Vertheilung, welche durch die nahe Magnetnadel hervorgebracht wird, hinreichend sey, die Magnetnadel zu bewegen. Auch bei diesem Versuche zeigte sich der Einfluss der Grösse der Magnetnadel auf das besprochene Phänomen; denn wenn ich statt der starken, 4 Z. langen und ½ L. dicken Magnetnadel, die eigentlich zum astatischen Apparat gehört, eine kleine, 1 Z. lange, aus Uhrfederstahl verfertigte nahm, und sie aufs beste astatisch stellte, so konnte ich durchaus keine Bewegung an ihr wahrnehmen, wenn ich dieselbe, eben so schnell gedrehte Kupferscheibe gehörig näherte.

Nun war aber noch nothwendig, den Einfluss des Erdmagnetismus, der doch, wenigstens nach unserer als richtig anerkannten Art, die magnetischen Phänomene zu betrachten, nicht wohl geläugnet werden konnte, für sich ebenso isolirt darzustellen, wie es vorhin mit den vom genäherten Magnete abhängigen geschah. Der einzige mir bekannte Weg hierzu war, den Einfluss einer schnell rotirenden Kupferscheibe auf einen unmagnetischen Kupferstreifen wirken zu lassen. Ich hing desshalb einen kupfernen, schmalen Streifen wie eine horizontal schwebende Magnetnadel mittelst eines ungedrehten feinen Seidenfadens auf, schloss ihn vollkommen in einen luftdichten gläsernen Recipienten ein, der dem Seidenfaden eine Länge von etwa 12 Z. gestattete, und befestigte diesen Recipienten mittelst einer eigenen Vorrichtung über einer horizontalen Kupferscheibe, die zum Rotiren in die Schnurmaschine eingesetzt war. Der Recipient war gegen jede Mittheilung der Bewegung von Seite des

Drehapparates möglichst gesichert, denn dieser ruhte auf dem Fussboden, jener war an einer starken Seitenmauer befestiget. Es fand auch während des Rotirens der Kupferscheibe am Recipienten nicht die mindeste bemerkbare Bewegung Statt, denn kleine darauf gestreute Papierschnitzchen blieben ganz ruhig darauf liegen. Durch sanftes Drehen des Recipienten brachte ich es dahin, dass die kupferne Nadel beinahe im magnetischen Meridian stand. Sobald sie ganz bewegungslos dahing, wurde die Kupferscheibe sehr schnell gedreht, und alsogleich einige Unruhe an der Nadel bemerkt; nach diesem wich sie aber sehr merklich nach der Richtung des Rotirens der Kupferscheibe aus. Ich weiss wohl, dass berühmte Physiker diesen Versuch bereits früher angestellt, und keine Bewegung an der Kupfernadel bemerkt haben, ich besorgte daher anfangs sehr, im Irrthum zu seyn, allein der Versuch wurde wenigstens 15mal wiederhohlt, die Scheibe bald rechts bald links gedreht, und immer die Ablenkung nach der gehörigen Richtung bemerkt. Um aber doch noch sicherer zu seyn, drehte ich den Recipienten so, dass die Kupfernadel beinahe senkrecht auf dem magnetischen Meridian ruhig stand. Wäre nun eine kleine Erschütterung, oder irgend ein nicht magnetischer Einfluss im Spiele gewesen, so hätte sie wohl auch in dieser Lage, wie in der vorigen, durch die bewegte Kupferscheibe abgelenkt werden müssen, allein bei vielmal wiederhohlten Versuchen konnte ich da nicht die mindeste Ablenkung wahrnehmen, ein Umstand, der zugleich beweiset, dass beim ganzen Hergang der Sache nicht die etwa durch den Erdmagnetismus bewirkte magne-

tische Vertheilung an der Kupferscheibe, sondern die der Kupfernadel die Hauptrolle spielt. Eine eiserne, scheinbar unmagnetische Nadel zeigte dieselben Phänomene, jedoch nicht in dem Masse stärker, als ich es erwartete. An einer Zinknadel konnte ich (auf diesem Wege) keine Spur einer Ablenkung hervorbringen. Ob die kupferne Nadel eisenhältig ist, weiss ich nicht; sie wurde aber aus einem Blechstreifen mit einer eisernen Scheere abgeschnitten, und mit einem eisernen Hammer gerade gemacht.

Nach allem diesen scheint es, als sey man einigermassen berechtiget, anzunehmen, die Ablenkung einer Magnetnadel durch eine schnell rotirende Metallscheibe komme grösstentheils auf Rechnung eines in dieser Scheibe durch die Magnetnadel hervorgerufenen, magnetischen, aber nur vorübergehenden Zustandes. Demnach wäre die Einwirkung der Magnetnadel auf die Metallscheibe die erste Bedingung, unter welcher eine Rückwirkung dieser auf jene möglich wird, wiewohl diese Reaction das für uns sichtbare am ganzen Verlaufe der Sache ist.

Wenn sich alles dieses so verhält, so muss auch, dachte ich, ein electrisirter Körper, der beweglich über einer Metallscheibe aufgehängt ist, durch Drehen dieser Scheibe eben so in Bewegung gesetzt werden, wie eine Magnetnadel. Um den richtigen Gang meiner Schlüsse zu prüfen, hing ich über einer 2 F. im Durchmesser haltenden Kupferscheibe einen 1 Z. dicken, runden und 12 Z. langen messingenen Leiter mittelst eines sehr feinen Messingdrahtes so auf, dass der Leiter und der Draht isolirt war und letzterem von einer etwa 2 Klafter weit entfernten Electrisir-

maschine Electricität mitgetheilt werden konnte. Ich sah, dass der Leiter, wenn die Electrisirmaschine in Bewegung war, und ihm daher Electricität zugeführt wurde, vollkommen ruhig war; dass er aber augenblicklich in eine drehende Bewegung versetzt wurde, wenn man die Kupferplatte auch nur langsam drehte. Er folgte gleichsam der Scheibe, sie mochte von der Rechten zur Linken oder umgekehrt gedreht werden, ja wenn er eine Bewegung nach einer Richtung bereits schon angenommen hatte, so durfte man der Metallscheibe nur eine entgegengesetzte Richtung geben, um auch schnell am Conductor eine Aenderung der Richtung zu bewirken. Denselben Versuch wiederhohlte ich mit demselben, nur dem Grade nach geringeren Erfolg, mittelst der vorhin besprochenen Zinknadel, von der ich wusste, dass sie durch magnetischen Einfluss der Erde nicht abgelenkt wird.

Um die Bewegung einer Magnetnadel durch den Einfluss einer schnell gedrehten Metallscheibe erklären zu können, ist ausser der bisher angenommenen Voraussetzung noch nöthig anzunehmen, dass sich der magnetische Zustand der Scheibe nicht so schnell ändert, als die Magnetnadel ihren Ort über derselben wechselt, denn nur unter dieser Voraussetzung ist es möglich, dass die Magnetnadel von der Metallscheibe gleichsam angezogen wird. Dem gemäss muss daher auch die Geschwindigkeit, mit der die Scheibe gedreht wird, auf die Grösse der Ablenkung, oder auf die Zeit einer vollen Umdrehung der Magnetnadel einen Einfluss ausüben. Um die Abhängigkeit der Ablenkung der Magnetnadel oder ihrer Umdrehung von der Geschwindigkeit der rotirenden Scheibe deut-

lich vor Augen zu stellen, nahm ich zwei Magnetnadeln, deren jede etwa $1\frac{1}{2}$ Zoll lang, und aus Uhrfederstahl verfertigt war, spannte beide in eine messingene Klemmzange so ein, dass ihre gleichnamigen Pole, z. B. ihre Nordpole, einander zugewendet waren, während ihre Südpole sich an den beiden Extremitäten der so gebildeten Doppelnadel befanden, die eine astatische Magnetnadel vorstellte, sobald die beiden einzelnen Magnetnadeln, aus denen sie bestand, beinahe einerlei Stärke hatten. Mittelst der genannten Klemmzänge wurden beide Nadeln an einen Seidenfaden aufgehängt, und alles in einen gut gegen jeden Luftzug verwahrten, gläsernen Recipienten eingeschlossen, und unterhalb eine Metallscheibe befestiget, welche an die vorhin genannte Schnurmaschine angebracht war. Am Boden des Recipienten war eine gerade Linie gezogen, die als Merkzeichen diente, um die Grösse einer Umdrehung der Magnetnadel genau schätzen zu können. Zur Beobachtung der Zeit einer solchen Umdrehung diente eine genaue Secundenuhr von Mahler in Günzburg, die in einer Secunde drei Schläge machte, und daher leicht $\frac{1}{3}$ S. angab. Die Resultate dieser Versuche, bei denen eine Kupferscheibe von 6 Z Durchmesser und $\frac{1}{2}$ L. Dicke angewendet wurde, enthält folgendes Verzeichniss:

Anzahl der Umdrehungen der Kupferscheibe in 1″	Zeit, in welcher drei Umdrehungen der Magnetnadel erfolgten.	Richtung der Bewegung der Kupferscheibe.
32	19 Secunden	von der Rechten zur Linken.
—	17 - -	
—	19 - -	
—	21 - -	von der Linken zur Rechten.
—	17 - -	
—	18 - -	
24	22 - -	von der Rechten zur Linken.
—	$18\frac{1}{2}$ - -	
—	20 - -	
—	22 - -	von der Linken zur Rechten.
—	$19\frac{1}{2}$ - -	
—	18 - -	
16	26 - -	rechts.
—	$24\frac{1}{2}$ - -	
—	27 - -	
—	$22\frac{1}{2}$ - -	links.
—	22 - -	
—	$22\frac{1}{2}$ - -	
8	$24\frac{1}{2}$ - -	rechts.
—	24 - -	
—	25 - -	
—	27 - -	links.
—	28 - -	
—	29 - -	

Bei der Reihe von Versuchen, wo nur 8 oder 16 Umdrehungen der Kupferscheibe in einer Secunde erfolgten, wurden eigentlich nur $1\frac{1}{2}$ Umdrehungen der Magnetnadel gezählt, und das Doppelte der beobachteten Zeit als die angesetzt, welche zu 3 Umdrehungen nöthig gewesen wäre.

Aus diesem ist zu ersehen, dass die Zeit einer Umdrehung der Magnetnadel in einem kleineren Verhältnisse wächst, als die der Umdrehung der Metall-

scheibe; es wird aber hieraus das Gesetz des gegenseitigen Zusammenhanges beider Bewegungen keinesweges klar. Wahrscheinlich steht dieses mit der Gestalt der Magnetnadel und den Dimensionen der Scheibe in einem bestimmten Verhältnisse, das sich aber erst aus vielen, sehr mannigfaltigen Versuchen wird abnehmen lassen; dessungeachtet kann es zwischen der Anziehung eines Elementes der Magnetnadel und der Metallscheibe ein sehr einfaches Gesetz geben, das aber durch den Einfluss der Gestalt beider Körper (also durch Integration der aus der Elementaranziehung beider Körper gegebenen Gleichung) einigermassen verwickelt wird. Wiewohl ich aus den bereits angestellten Versuchen kein bestimmtes Gesetz auszumitteln im Stande war, so lehrte mich doch die Erfahrung, dass die Grösse der Ablenkung der Magnetnadel oder die Zeit einer Umdrehung nicht bloss von der Masse der Metallscheibe, auch nicht allein von der Stärke und Grösse der Magnetnadel, sondern vom Verhältnisse beider zu einander abhängt, wie es auch den Gesetzen der Vertheilung ganz angemessen ist. So konnte z. B. die Magnetnadel, welche zu dem vorher erwähnten Versuch gebraucht wurde, und über der 6 Zoll im Durchmesser haltenden Kupferplatte in eine ziemlich schnelle drehende Bewegung versetzt wurde, mittelst einer Kupferplatte von 2 F. Durchmesser, die eben so schnell bewegt ward, nicht ganz umgedreht werden. Dafür aber gerieth über ihr ein aus zwei Magnetstäben zusammengesetzter astatischer Magnet, wovon jeder der zwei Bestandtheile 16 Z. Länge und 49 Q. L. im Durchschnitt hatte, leicht in drehende Bewegung, es for-

derten aber drei volle Umdrehungen desselben bei 16 Rotationen der Kupferplatte beim ersten Versuch $63\frac{1}{2}$, beim zweiten 61, beim dritten 67, mithin im Durchschnitt 63.8 Secunden Zeit. Durch die 6zöllige Scheibe konnte sie in gar keine drehende Bewegung versetzt werden.

Der Einfluss der Gestalt der gedrehten Metallmasse zeigte sich vorzüglich deutlich bei Kugeln aus verschiedenen Metallen, deren jede 2 Zoll im Durchmesser hatte. Ich versuchte es, durch eine solche schnell bewegte Kugel aus Zink, Zinn, Blei, Wismuth und Eisen (diese hatte einen etwas grösseren Durchmesser) die vorhin beschriebene, kleine, astatische Doppelnadel abzulenken, aber ohne Erfolg. Selbst über einer Kugel aus einem natürlichen Magnete von etwa $1\frac{3}{4}$ Z. Durchmesser gerieth sie nur in unregelmässige Schwankungen, wie es zu erwarten war. Dasselbe Verhalten zeigte eine prismatische wohl magnetisirte Nadel aus reinem Nickel, die der berühmte Richter in Berlin verfertiget hatte, und die mir durch die Güte unsers hochgeachteten Freyherrn Joseph v. Jacquin zum Gebrauche überlassen ward. Sie hat nur eine Länge von etwa 2 Zoll und wurde von einer 4 Z. im Durchmesser haltenden Kupferscheibe deutlich, von der 2schuhigen hingegen gar nicht merklich abgelenkt. Eine eiserne Scheibe von $1\frac{1}{2}$ Z. Durchmesser, welche mittelst des electrischen Stromes aus einer Leidnerflasche mit 6 magnetischen Polen versehen, und dann über der 6zolligen, schnell gedrehten Kupferscheibe aufgehängt ward, erlitt auch eine starke Ablenkung, aber keine volle

Umdrehung, während sie über der grossen Scheibe ganz ruhig hängen blieb.

Wenn der vorausgeschickten Ansicht gemäss der magnetische Zustand der Kupferplatte an einer Stelle länger anhält, als der ihn erzeugende Magnet sich gerade über ihm befindet, so schien es mir wahrscheinlich, dass auch dieser Zustand nicht im ersten Augenblick der Annäherung der Magnetnadel an die Kupferplatte hervorgerufen werde. Ich stellte desshalb folgende Versuche an: Es wurde zwischen die Kupferplatte und die Magnetnadel eine Platte aus Eisenblech gebracht, von der ich wusste, dass sie den ganzen Einfluss jener auf diese abhalte, auf ein gegebenes Zeichen weggenommen, und die Zeit bestimmt, die von diesem Augenblick an bis zu dem verfloss, wo die Magnetnadel die erste Umdrehung vollendet hatte. Dann wurde ohne Dazwischenkunft der Eisenplatte die Kupferscheibe plötzlich in eine sehr schnelle Bewegung versetzt, und wieder die Zeit, von diesem Momente an, bis zur Vollendung der ersten Umdrehung bestimmt. Diese Zeit enthält für beide Fälle folgende Tabelle:

Zeit der ersten Umdrehung bei 32 Drehungen der Kupferscheibe in 1 Secunde.

Ohne Beiseyn der Eisenplatte.	Nach Wegnahme der Eisenplatte.
9 Secunden.	7 Secunden.
9 —	7 —
$9\frac{1}{2}$ —	9 —

Hieraus sieht man, dass die magnetische Vertheilung in einer auf diesem Wege unbestimmbaren Zeit

vor sich geht, ja es hat sogar den Anschein, als wäre der Einfluss des Magnetes auf die Kupferscheibe im zweiten Falle kräftiger als im ersten, welches aber wahrscheinlich daher kommt, dass man nicht im Stande war, der Kupferscheibe gleich auf das gegebene Zeichen die gehörige volle Geschwindigkeit zu ertheilen.

Wiewohl alle bisher angeführten Erscheinungen sehr zu Gunsten der früher aufgestellten Hypothese sprechen, so glaubte ich mich doch noch überzeugen zu müssen, dass die besprochenen Phänomene nicht von einem electrischen Zustande des gedrehten Metalles herrühren. Ich habe desshalb eine Kupferscheibe mit einer eben so grossen Zinkscheibe in Berührung gebracht, und beide mit einander in eine schnelle Rotation versetzt, dabei aber einmal die Kupfer- das anderemal die Zinkscheibe zu oberst angebracht, dann beide mittelst eines in verdünnter Schwefelsäure getränkten Papierlappen von einander zum Theile getrennt, und immer die Zeit gemessen, in welcher die darüber befindliche astatische Magnetnadel drei volle Umdrehungen vollbrachte. Die Resultate gibt folgende Tabelle, aus der man zugleich sieht, dass diese Phänomene keinem electrischen Einflusse zugeschrieben werden können:

Zeit von drei Umdrehungen der Magnetnadel.

17	Secunden.	Kupfer oben.
$13\frac{1}{2}$	—	
$14\frac{1}{2}$	—	
15	—	
15	—	

16	Secunden.	Zink oben.
16	—	
15½	—	
16	—	
15½	—	
19	—	Zink und Kupfer mit dem feuchten Leiter. Das Kupfer oben.
14	—	
15½	—	

III. Dulong's Untersuchung über das Brechungsvermögen elastischer Flüssigkeiten.

(Auszug aus: Annales de Chimie etc. Février 1826.)

Es ist bekannt, dass Dulong und Petit zwischen der specifischen Wärme und dem Atomengewichte der Körper ein merkwürdiges, sehr einfaches Verhältniss entdeckt haben. Die grosse Analogie, welche seit längerer Zeit zwischen den Hauptphänomenen des Lichtes und der Wärme bemerkt wurde, liess ersteren hoffen, dass sich für das Brechungsvermögen und die innere Constitution der Theile der Körper eine ähnliche Verbindung ableiten lassen werde, ja es war ihm wahrscheinlich, dass sich aus dem Brechungsvermögen die Modificationen, welche die Molleculn bei den chemischen Verbindungen erleiden, noch genauer werden erkennen lassen, weil sich dieses Vermögen schärfer bestimmen lässt, als die specifische Wärme. Dazu sind vorzüglich elastische Flüssigkeiten geeignet. Zu diesem Zwecke musste man aber das Brechungsvermögen aller einfachen und einer grossen Anzahl zusammengesetzter Gase genau

kennen. Biot's und Arago's musterhafte Arbeit über die Affinität der Körper zum Lichte liefert zu diesem Zwecke zu wenige Daten, und die von Arago und Petit hatte nur die Untersuchung zum Zwecke, ob die Wirkung eines Körpers auf das Licht seiner Dichte beständig proportionirt bleibt, wie es die Newtonsche Theorie fordert. Es mussten daher neue Forschungen eingeleitet werden, zu denen man vorzüglich zusammengesetzte Gase wählte, deren Elemente man im elastisch-flüssigen Zustande erhalten konnte. Da es sich nur um das Verhältniss des Brechungsvermögens aller Gase zu dem als Einheit angenommenen handelte, so konnte folgendes Verfahren hinreichen: Ein hohles Prisma mit zwei Glaswänden und einem brechenden Winkel von ungefähr 145° ward mit einem Apparate in solche Verbindung gesetzt, dass man daraus die atmosphärische Luft herausziehen, irgend eine andere trockene Luftart einfüllen, und sie verdünnen oder verdichten konnte, dabei aber den Grad ihrer Wärme und Dichte zu beurtheilen im Stande war. Sah man nun mittelst eines fest aufgestellten Fernrohres durch das Prisma auf ein weit entferntes Ziel, so konnte man es durch Verdichtung oder Verdünnung der darin befindlichen Luft immer dahin bringen, dass dieses Ziel an derselben Stelle im Gesichtsfelde des Fernrohrs blieb. Wurde nun das von Biot und Arago erwiesene Gesetz, dass die Zu- oder Abnahme der Geschwindigkeit eines Lichtstrahles in einem Mittel im einfachen Verhältnisse mit der Dichte dieses Mittels steht, als richtig angenommen, so konnte man durch eine einfache Proportion das Verhältniss der Zu- oder Abnahme der Geschwindigkeit des Lichtes in jeder Luftart

gen die in der atmosphärischen Luft bei gleicher Elasticität beider Flüssigkeiten berechnen. Man sieht leicht ein, dass dieses Verfahren sehr scharfe Resultate geben muss, weil man bei jedem Versuch sehr schnell die nöthigen Messungen vornehmen kann, und daher alle während dieser Zeit vorfallenden Veränderungen von wenig Belang seyn können. Die möglichen Fehler, welche durch das mechanische Verfahren bei diesen Versuchen begangen werden können, hält Dulong für kleiner als $\frac{1}{3000}$ des ganzen Effectes; er konnte dieses mit Recht, indem sein Verfahren von jeder Theilung, von dem Parallelismus der Wände der Glasplatten, aus denen das Prisma besteht, vom brechenden Winkel desselben etc. unabhängig ist. Die grössten Fehler, die vorkommen konnten, hängen von der Reinheit der Gase ab, und auf diese Rechnung mögen auch die Differenzen kommen, welche zwischen den von Biot und Arago und denen von Dulong gefundenen Resultaten Statt finden. Desshalb gibt Dulong für jede Luftart das Verfahren an, wodurch er sie erzeugt hat. Sauerstoffgass bereitete er aus vorläufig geschmolzenem Chlorkali, und leitete es durch Kalilauge und durch eine Röhre mit Stücken von feuchtem Kali; Stickgas aus atmosphärischer Luft durch Verbrennen des Phosphors. Es wurde mit einer Lösung von Chlor und mit Kalilauge gewaschen. Stickgas, das durch Zersetzung des Salpetergases mittelst rothen Kupfers bereitet wird, hat genau dasselbe Brechungsvermögen wie das vorige. Dieses ist auch der einzige bisher bekannte Beweis, für die Identität des Radicals der Salpetersäure und des Gases, das übrig bleibt, wenn

man von der Luft das Oxygen und die Kohlensäure absorbirt hat.

Hydrogengas wurde durch käufliches Zink und Schwefelsäure bereitet, die von Salpetersäure frei war, in einer starken Kalilauge gewaschen, und dann durch eine Röhre mit angefeuchteten Stücken von Pottasche geleitet. Es war geruchlos. Chlorgas ward mittelst von Kohlensäure freien Manganoxyds erzeugt und durch eine lange Wassersäule geleitet; Kohlensäuregas aus weissem Marmor mittelst Salpetersäure, und hierauf durch eine lange Röhre mit zuerst krystallisirter dann zerstossener, kohlensaurer Sode, geleitet. Stickgasoxyd erzeigte D. durch Zersetzung des salpetersauren Ammonium mittelst gelinder Wärme und leitete es successiv durch Kalilauge und Schwefelsäure; salpeteriges Gas aus salpetrigsaurem Kali, das durch Calcination des Salpeters erhalten und durch Salpetersäure zersetzt war. Es ging durch Wasser und über feuchte Pottasche. Ammoniakgas wurde aus reinem tropfbaren Ammonium, Salzsäuregas aus tropfbarer, sehr reiner Säure entwickelt. Kohlenstoffoxydgas erhielt er aus einer reinen Mischung von weissem Marmor und Eisen, deren beide vorher calcinirt waren. Der darin enthaltene Wasserstoff wurde wohl berücksichtiget. Blausäure aus wohl getrocknetem neutralen blausauren Quecksilber. Das Gas blieb drei Tage in Berührung mit rothem Quecksilberoxyd, und das darin enthaltene Stickgas wurde bestimmt. Oehlbildendes Gas nach Saussure. Es wurde mittelst Pottasche vom Wasser, Kohlensäure, schwefeliger Säure und vom Aether befreit. Sumpfluft (gas des marais) wurde am Flusse Bièvre gesammelt. Sie enthielt ungefähr

$\frac{1}{10}$ Schwefelwasserstoffgas und Kohlensäure, ward durch Phosphor nicht vermindert, und enthielt nur 2,8 p. C. Azot, welches auch berücksichtiget wurde. Es absorbirte zweimal sein Volumen Oxygengas, gab 1 Volumen Kohlensäuregas, wie es der von den meisten Chemikern angenommenen Zusammensetzung dieses Gases gemäss ist. Salzäther ward nach Thenard bereitet und vom Alkohol befreit, Wasserstoffblausäure nach Gay-Lussac, wasser- und Salzsäurefrei. Phosgengas nach Davy. Es wurde auf die Wasserstoffchlorsäure Rücksicht genommen, die sich aus dem im Kohlenstoffoxyd enthaltenen Hydrogen bildete. Schwefelige Säure durch Quecksilber und von Salpetersäure freie Schwefelsäure. Das Gas wurde gewaschen. Schwefelwasserstoffgas aus Schwefelspiessglanz mittelst Wasserstoffchlorsäure. Gephosphortes Wasserstoffgas aus phosphatischer Säure durch die Wärme. Der Schwefeläther kochte bei 35°.

Der Werth der von Dulong gefundenen Resultate beruht nebst der Genauigkeit des mechanischen Verfahrens und der Reinheit der Gase auch noch auf dem Grundsatze, dass die Zu- oder Abnahme der Geschwindigkeit des Lichtes beim Eintritt in ein heterogenes Mittel der Dichte desselben proportionirt ist. Als Belege für die Richtigkeit dieses Grundsatzes führt D. folgende Beispiele an:

Gemenge aus Kohlensäuregas und atm. Luft bei 23° C.	Kohlensäuregas	730,5	25.88
	atmotsph. Luft	2092	74.12
			100.

Die Ablenkung des Lichtes war dieselbe, wenn die Elasticität

der atmosph. Luft $0^m.5757$
des Gemenges $0^m.3054$ war.

Es ist daher das Verhältniss des Zuwaches an Geschwindigkeit in dem Gemenge und in der atm. Luft wie 1,136 : 1.

Der Werth des Brechungsvermögens von Kohlensäuregas = 1.523 führt genau zu demselben Resultate, wenn er nach dem angeführten Grundsatze berechnet wird.

Gemenge aus gleichen Theilen Wasserstoffgas und Kohlensäuregas bei 21° C.

Elasticität der atm. Luft = $0^m.5326$
- - des Gemenges = $0^m.5317$

Beobachtetes Brechungsvermögen = 1.0017
Berechnetes Brechungsvermögen = 0.999

Bei einerlei Elasticität ist das Brechungsvermögen

von Oxygengas = 0.924
- Azotgas = 1.02
- Kohlensäuregas = 1.526.

Nimmt man in der atmosph. Luft 0,21 Oxygen, 0.69 Azot an, so wird ihr Brechungsvermögen = 0.99984. Gibt man dazu 0.00026 auf Rechnung des Brechungsvermögens von 0.0005 Theilen Kohlensäure, die sich darin befinden, so bekommt man 1.0001 als das berechnete Brechungsvermögen der atm. Luft.

Die Resultate der Untersuchung von 22 Gasarten, wenn sie auf einerlei Elasticität reducirt werden, sind in folgender Tafel enthalten, wobei zu bemerken ist, dass die Beobachtungen bei 8 — 32° C. genau dieselben Werthe gaben und dass daher die Tempera-

tur innerhalb dieser Grenzen auf das Verhältniss des Brechungsvermögen keinen Einfluss äussert.

Name der Gasart.	Brechungsvermögen.	Dichte.
Atmosphärische Luft . . .	1	—.—
Oxygen	0.924	1.1026
Hydrogen	0.470	0.0685
Azot	1.020	0.976
Chlor	2.623	2.47
Azotoxyd	1.710	1.527
Salpetriges Gas	1.03	1.039
Hydrochlorgas	1.527	1.254
Kohlenoxydgas	1.157	0.972
Kohlensäure	1.526	1.524
Blausäure	2.832	1.818
Oehlbildendes Gas . . .	2.302	0.980
Sumpfgas	1.504	0.559
Salzäther	3.72	2.234
Hydrokyansäure	1.531	0.944
Ammoniak	1.309	0.591
Phosgengas	3.936	3.442
Schwefelwasserstoffgas . .	2.187	1.178
Schwefeliges Gas	2.260	2.247
Schwefeläther	5.197	2.580
Kohlensulphurid	5 110	2.644
Phosphor. Wasserstoffgas in Minimum	2.682	1.256

Die Dämpfe von Salz- und Schwefeläther und von Schwefelcarbonid wurden bei einer zwei oder dreimal geringeren Dichte untersucht, als die ist, welche ihrem Maximum entspricht. Nimmt man diese Dämpfe beim Maximum ihrer Dichte, so findet man das Brechungsvermögen, wie folgt:

Salzäther	=	3,87
Schwefelcarbonid	=	5.198
Schwefeläther	=	5,290.

Die hier angegebenen Zahlen sind von jeder Hypothese über die Natur des Lichtes unabhängig. Nach der Emanationshypothese drücken sie die Verhältnisse der Zunahme der Geschwindigkeit des Lichtes bei seinem Durchgang durch die entsprechenden Gasarten aus, wenn man diese Zunahme in der atmosphärischen Luft als Einheit annimmt. Da nach Delambre's Beobachtungen und Biots und Arago's directen Messungen die Zunahme der Geschwindigkeit des Lichtes in der Luft bei 0° C. Wärme und $0^m,76$ (28 Z.) Luftdruck 0.000294 von der Geschwindigkeit im leeren Raume beträgt, so darf man diese Zahl nur mit obigen Werthen multipliciren, um die absoluten Werthe des Zuwachses an Geschwindigkeit bei einerlei Temperatur und bei demselben Druck zu bekommen, und nur die Geschwindigkeit im leeren Raume, nämlich 1 dazu setzen, um die Brechungsexponenten beim Uebergang des Lichtes aus dem leeren Raume in die entsprechende Gasart zu erhalten. Aus diesen endlich lässt sich leicht der Ausdruck für das Brechungsvermögen bestimmen.

Will man diese Ausdrücke nach dem Sinne der Vibrationshypothese einrichten, so braucht man nur die absoluten Werthe der Geschwindigkeit des Lichtes in der Luft und in anderen Gasarten zu ändern, die Exponenten des Brechungsverhältnisses bleiben dieselben. Die Werthe des Brechungsvermögens stellen dann die Zunahme der Dichte des Aethers der in jedem Gas enthalten ist, vor, wenn man voraussetzt, dass die Ungleichheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen bloss vom Unterschiede der Dichte des Aethers herkomme.

Folgende Tafel enthält die Brechungsverhältnisse und das Brechungsvermögen der Gase bei einer Temperatur von 0° C. und einem Luftdrucke von 0,76.

Name der Gasart.	Brechungsverhältniss.	Brechungsvermögen.	Dasselbe nach Biot u. Arago.
Atmosphär. Luft . .	1.000294	0.000589	0.000589
Oxygen	1.000272	0.000544	0.000560
Hydrogen	1.000138	0.000277	0.000285
Azot	1.000300	0.000601	0.000590
Ammoniak	1.000385	0.000771	0.000762
Kohlensäure	1.000449	0.000899	0.000899
Chlor	1.000772	0.001545	
Hydrochlor	1.000449	0.000899	0.000879
Stickstoffoxyd . . .	1.000503	0.001007	
Salpetergas	1.000303	0.000606	
Kohlenstoffoxyd . .	1.000340	0.000681	
Blaustoff	1.000834	0.001668	
Oehlbildendes Gas	1.000678	0.001356	
Sumpfgas	1.000443	0.000886	
Salzäther	1.001093	0.002191	
Wasserstoffblausäure	1.000451	0.001903	
Phosgengas	1.001159	0.002318	
Schwefeligsaures Gas	1.000665	0.001331	
Schwefelwasserstoff	1.000644	0.001288	
Schwefeläther . . .	1.000153	0.003061	
Schwefelcarbonid .	1.000150	0.000301	
Wasserstoffphosphorsäure im Minimum	1.000789	0.001759	

Man sieht hieraus leicht, dass das Brechungsververmögen der einfachen Gasarten nicht mit ihrer Dichte in irgend einem Verhältnisse steht. Denn weil sich die Beobachtungen auf einerlei Temperatur und auf denselben Druck beziehen, wo also die Theile der Gasarten einerlei Entfernung von einander haben, so müssten die Brechungsvermögen einander

gleich seyn, oder in einem einfachen Verhältnisse zu einander stehen, wenn jedes Theilchen gleich oder nach einem einfachen Verhältnisse auf das Licht wirkte. Auch ist das Brechungsvermögen einer zusammengesetzten Gasart nicht der Summe der Brechungsvermögen ihrer Elemente gleich. Um dieses darzuthun, berechnete D. das Brechungsvermögen zusammengesetzter Gase aus dem ihrer Bestandtheile, indem er ihr Brechungsvermögen bei gleicher Elasticität nach Verhältniss ihrer Volumina und der bei der Verbindung Statt findenden Verdichtung corrigirte, wobei sich Folgendes ergab:

Brechungsvermögen der atmosphärischen Luft = 1.

Name der Gase.	beobachtetes Brechungsvermögen.	berechnetes Brechungsvermögen.	Differenz.
Ammoniak . . .	1.309	1.216	+ 0.093
Stickstoffoxyd . .	1.710	1.482	+ 0.229
Salpetergas . . .	1.030	0.972	+ 0.058
Wassergas *) . .	1	0.933	+ 0.067
Phosgengas . . .	3.936	3.784	+ 0.0152
Salzäther	3.72	3.829	— 0.099
Wasserstoffblausäure	1.521	1.651	— 0.130
Kohlensäure . . .	1.526	1.629	— 0.093
Wasserstoffchlorsäure	1.527	1.547	— 0.020

*) Arago hat zwar das Brechungsvermögen des Wasserdampfes um $\frac{1}{12}$ kleiner gefunden als das der atmosphärischen Luft, allein dadurch ist doch obige Differenz noch nicht ausgeglichen.

Avogadro hat durch Raisonnement zwischen dem Brechungsvermögen der Gase und ihrer specifischen Wärme ein einfaches Verhältniss aufzufinden geglaubt, und auch eine Formel angegeben, aus der man ersteres berechnen kann; allein die Rechnung stimmt mit den Resultaten Dulong's nicht überein. Eben so wenig findet man in dem Verhältnisse der Bestandtheile eines Körpers oder ihrer besonderen Verdichtung den Grund der Zu- oder Abnahme der brechenden Kraft, selbst wenn man auf die Wärme Rücksicht nimmt, die sich während des Actes der Verbindung entwickelt. Man sieht daher, dass das Brechungsvermögen der Körper und ihre Capacität für die Wärme nicht von einer Ursache derselben Ordnung abhängen, denn die letztere steht mit dem Atomengewichte der Körper in einer sehr deutlichen Relation, während ersteres davon unabhängig ist. Auch gibt es keine einfache Verbindung zwischen der brechenden Kraft einfacher und zusammengesetzter Substanzen. Es scheint aber, als hänge die Ungleichheit der Geschwindigkeit des Lichtes in verschiedenen Gasen bei einerlei Temperatur und unter demselben Drucke von dem electrischen Zustande, der kleinsten Theile ab. Bedient man sich der Ausdrücke der Vibrationshypothese, die den Erscheinungen mehr zu entsprechen scheint, so hat es den Anschein, als wenn das Licht desto mehr verzögert würde, je stärker die Molleculn positiv electrisch sind.

IV. Höhenmessung mit einem Barometer, nebst den dazu erforderlichen Tafeln von Nixon.

(Fortsetzung und Beschluss.)

(Annales of philosophy. January. Feb. 1826.)

Construction und Gebrauch der Tafeln.

Tafel I. dient, um die beobachteten Barometerstände auf einerlei Temperatur zu bringen. Man wendet sie an, indem man die dem Temperaturunterschiede des Quecksilbers entsprechende Correction zur kälteren Quecksilbersäule addirt, oder sie von der wärmeren abzieht. Sie ist nach der Formel 0,00018 (t—t′) berechnet, in welcher t und t′ die Temperatur des Quecksilbers bei zwei Beobachtungen, 0,00018 hingegen den von der Ausdehnung des Quecksilbers in der Wärme abhängenden Coefficienten bezeichnet *).

Tafel II. gibt den Höhenunterschied zweier Stationen ohne Rücksicht auf die Correction für die Wärme der Luft und für die geographische Breite, so weit dieser von den bis auf Hundertel der Zolle ausgedrückten Barometerstand abhängt. Beim Gebrauche dieser Tafel drückt man die Höhe der Quecksilbersäule des Barometers in beiden Stationen in Tausendtelzoll aus,

*) Nixon bedient sich dieser Tafel zwar nur, um die verschiedenen an der Basis gemachten Beobachtungen auf einerlei Temperatur zu bringen, und gibt für die Unterschiede der Temperatur des Quecksilbers in der unteren und oberen Station eine andere Tafel an, allein man kann sich der hier besprochenen auch bedienen, um alle Beobachtungen an der Basis und in der höheren Station auf einerlei Temperatur zu bringen, und so eine ganze Tafel entbehren.

lässt davon die letzte Ziffer weg, findet für den Rest die demselben in der Tafel gegenüberstehende Höhe, d. i. die Entfernung dieser Station von der, wo die Barometerhöhe 21 Z. beträgt.

Es ist diese Tafel nach Laplace's Formel berechnet. Heisst nämlich x der Höhenunterschied zweier Stationen, in denen die Temperatur T und t herrscht, und der Barometerstand H und h Statt findet, so ist

$$x = 18336(1 + 0.002837 \cos . 2 \,\text{lat.}) \left(1 + \frac{2(T+t)}{1000}\right) \log \frac{H}{h}$$

in Metern, oder

$$x = 56445(1 + 0.002837 \cos . 2 \,\text{lat.}) \left(1 + \frac{2(T+t)}{1000}\right) \log \frac{H}{h}.$$

in Pariser Fussmass.

Denkt man sich eine Atmosphäre von gleichförmiger Temperatur = 0° C., und in dieser eine Anzahl Barometer vertical über einander gestellt, so dass die Quecksilbersäule in jedem um 0,01 Z. tiefer steht als in dem vorhergehenden, die im obersten aber 21 Z. hoch ist, so findet man die Entfernung desjenigen, bei dem die Quecksilbersäule eine Höhe von H Zoll hat, vom obersten durch die Formel

$$56445 \log . \frac{H}{21}.$$

Die aus dieser Formel sich ergebenden Höhen enthält nun die Tafel II.

Die Tafel III. gibt an, wie viel man zu der nach vorhergehendem Verfahren gefundenen Höhe addiren muss, um ein Resultat zu bekommen, welches der ganzen Barometerhöhe mit Einschluss der Tausendtel-Theile eines Zolles entspricht. Man berechnet sie leicht durch Interpoliren.

Hat man so die Höhe der Station, wo der Baro-

meterstand 21 Zoll beträgt, über das Niveau von h und H aus den drei ersten Tafeln gefunden, so gibt ihre Differenz die verticale Entfernung dieser zwei Stationen von einander bei 0° C. Multiplicirt man diese Höhe mit 0.002 und mit der Summe der Thermometerstände in beiden Stationen, so erhält man die Correction für die Wärme der Luft über 0° C.

Multiplicirt man die so corrigirte Höhe durch 0.002837 und den Cosinus der doppelten geographischen Breite des Ortes, so erlangt man die Correction für die Breite.

Weil aber die Vergrösserung oder Verkleinerung der Summe der Lufttemperaturen in beiden Stationen um 1° C. den Höhenunterschied derselben um 0.002 vergrössert oder verkleinert, so kann man die Correction für die Breite ganz übergehen, und dafür die Summe obiger Temperaturen, um die in Tafel IV angegebenen Grösse vermehren. Diese Grösse ist aus der Formel $\frac{0.002837 \cos 2.\text{lat.}}{0.002}$ berechnet.

Wenn man bei der Bestimmung des Höhenunterschiedes zweier Stationen statt ihrer mittleren Lufttemperatur die doppelte Anzahl der Wärmegrade der Luft in der oberen Station nimmt, so hat man ein zu kleines Resultat gefunden, und muss desshalb eine Correction anbringen. Um diese zu finden, bedenke man, dass das Thermometer für jede Erhöhung von 420 F. um 1° C. abnimmt, und dass die Correction für jeden Wärmegrad $\frac{1}{500}$ der ganzen Höhe beträgt, woraus sich ergibt, dass die Correction $\frac{1}{500} \cdot \frac{1}{420}$ oder

nahe das Quadrat des 500ten Theils der Höhe beträgt. Hiernach ist Tafel V berechnet.

Tafel I.

Differenz der Temperatur.	Luftdruck.			
	30 Z.	29 Z.	28 Z.	27 Z.
1° C.	0.005	0.005	0.005	0.005
2 -	11	10	10	10
3 -	15	16	15	15
4 -	22	21	20	20
5 -	27	26	25	24
6 -	32	31	30	29
7 -	38	36	35	34
8 -	42	32	40	39
9 -	49	47	45	44
10 -	54	52	50	49
11 -	59	57	55	54
12 -	65	63	60	59
13 -	70	68	65	64
14 -	76	73	70	68
15 -	81	78	75	72

Tafel II.

Zoll Luftdruck	Fuss Höhe	Zoll Luftdruck	Fuss Höhe	Zoll Luftdruck	Fuss Höhe
21.00	0	21.40	462.2	21.80	916.4
1	11.6	41	478.8	81	927.4
2	23.3	42	485.4	82	939.0
3	35.0	43	496.9	83	950.1
4	46.6	44	508.0	84	961.7
5	58.2	45	519.6	85	972.7
6	70.0	46	531.1	86	983.8
7	81.3	47	542.7	87	994.8
8	93.1	48	553.9	88	1006
9	104.7	49	565.4	89	1018
21.10	116.3	21.50	577.0	21.90	1029
11	127.8	51	588.1	91	1040
12	139.4	52	599.6	92	1051
13	151.1	53	610.7	93	1062
14	162.7	54	622.3	94	1073
15	174.2	55	633.3	95	1084
16	186.3	56	645.0	96	1096
17	197.3	57	656.6	97	1107
18	209.4	58	667.6	98	1118
19	220.5	59	679.2	99	1129
21.20	232.6	21.60	790.8	22.00	1140
21	243.7	61	701.8	1	1151
22	255.3	62	712.9	2	1163
23	266.8	63	724.5	3	1174
24	278.4	64	736.1	4	1185
25	290.0	65	747.1	5	1196
26	301.5	66	758.1	6	1207
27	313.2	67	769.8	7	1218
28	324.7	68	780.9	8	1229
29	336.3	69	792.5	9	1240
21.30	347.4	21.70	803.5	22.10	1252
31	359.0	71	815.1	11	1263
32	370.5	72	826.2	12	1274
33	382.1	73	837.8	13	1285
34	393.7	74	848.9	14	1296
35	404.8	75	860.0	15	1307
36	416.4	76	871.5	16	1318
37	327.9	77	882.6	17	1329
38	439.5	78	894.2	18	1340
39	451.1	79	905.2	29	1351

Zoll Luftdruck	Fuss Höhe	Zoll Luftdruck	Fuss Höhe	Zoll Luftdruck	Fuss Höhe
22. 20	1362	22. 60	1800	23. 00	2230
21	1373	61	1811	1	2240
22	1384	62	1822	2	2251
23	1395	63	1833	3	2262
24	1406	64	1843	4	2273
25	1417	65	1854	5	2283
26	1428	66	1865	6	2294
27	1439	67	1876	7	2304
28	1450	68	1886	8	2315
29	1461	69	1897	9	2325
22. 30	1472	22. 70	1908	23. 10	2336
31	1483	71	1918	11	2346
32	1494	72	1929	12	2357
33	1505	73	1940	13	2368
34	1516	74	1951	14	2378
35	1527	75	1962	15	2390
36	1338	76	1973	16	2400
37	1549	77	1984	17	2411
38	1560	78	1994	18	2421
39	1571	79	2005	19	2432
22. 40	1582	22. 80	2016	23. 20	2442
41	1593	81	2026	21	2453
42	1604	82	2037	22	2463
43	1615	83	2048	23	2474
44	1626	84	2058	24	2484
45	1637	85	2069	25	2495
46	1648	86	2080	26	2505
47	1659	87	2091	27	2515
48	1670	88	2102	28	2526
49	1681	89	2113	29	2537
22. 50	1693	22. 90	2123	23. 30	2548
51	1702	91	2134	31	2559
52	1713	92	2145	32	2570
53	1724	93	2155	33	2581
54	1734	94	2166	34	2590
55	1745	95	2177	35	2600
56	1756	96	2188	36	2610
57	1767	97	2198	37	2621
58	1778	98	2208	38	2631
59	1789	99	2219	39	2642

Zoll Luftdruck	Fuss Höhe	Zoll Luftdruck	Fuss Höhe	Zoll Luftdruck	Fuss Höhe
23. 40	2652	23. 80	3068	24. 20	3476
41	2663	81	3078	21	3486
42	2674	82	3088	22	3497
43	2685	83	3098	23	3507
44	2695	84	3109	24	3517
45	2705	85	3120	25	3527
46	2715	86	3130	26	3538
47	2725	87	3140	27	3548
48	2736	88	3150	28	3558
49	2747	89	3161	29	3568
23. 50	2757	23. 90	3171	24. 30	3578
51	2767	91	3181	31	3588
52	2778	92	3191	32	3598
53	2788	93	3201	33	3608
54	2799	94	3211	34	3618
55	2810	95	3222	35	3628
56	2820	96	3232	36	3638
57	2830	97	3242	37	3649
58	2841	98	3253	38	3658
59	2851	99	3263	39	3668
23. 60	2862	24. 00	3273	24. 40	3678
61	2872	1	3283	41	3688
62	2882	2	3294	42	3698
63	2892	3	3304	43	3709
64	2902	4	3314	44	3719
65	2913	5	3324	45	3729
66	2924	6	3335	46	3739
67	2935	7	3345	47	3749
68	2945	8	3355	48	3759
69	2955	9	3366	49	3769
23. 70	2965	24. 10	3376	24. 50	3797
71	2976	11	3386	51	3789
72	2986	12	3396	52	3799
73	2996	13	3406	53	3809
74	3006	14	3416	54	3819
75	3017	15	3426	55	3829
76	3027	16	3436	56	3839
77	3037	17	3446	57	3849
78	3047	18	3456	58	3859
79	3058	19	3466	59	3869

Zoll Luftdruck	Fuss Höhe	Zoll Luftdruck	Fuss Höhe	Zoll Luftdruck	Fuss Höhe
24. 60	3879	25. 00	4275	25. 40	4663
61	3889	1	4284	41	4672
62	3899	2	4294	42	4682
63	3910	3	4303	43	4692
64	3920	4	4313	44	4702
65	3930	5	4323	45	4711
66	3940	6	4333	46	4721
67	3950	7	4343	47	4731
68	3959	8	4352	48	4741
69	3968	9	4362	49	4750
24. 70	3978	25. 10	4372	25. 50	4760
71	3988	11	4381	51	4770
72	3998	12	4391	52	4779
73	4008	13	4401	53	4789
74	4018	14	4411	54	4798
75	4027	15	4421	55	4808
76	4037	16	4431	56	4818
77	4047	17	4441	57	4827
78	4057	18	4450	58	4837
79	4067	19	4460	59	4846
24. 80	4077	25. 20	4470	25. 60	4856
81	4087	21	4480	61	4866
82	4097	22	4489	62	4876
83	4107	23	4498	63	4885
84	4117	24	4508	64	4894
85	4127	25	4518	65	4904
86	4137	26	4527	66	4913
87	4147	27	4537	67	4923
88	4156	28	4547	68	4932
89	4166	29	4556	69	4942
24. 90	4176	25. 30	4566	25. 70	4951
91	4186	31	4576	71	4961
92	4196	32	4585	72	4970
93	4206	33	4595	73	4980
94	4216	34	4605	74	4989
95	4226	35	4615	75	4999
96	4236	36	4625	76	5009
97	4245	37	4635	77	5018
98	4255	38	4644	78	5027
99	4265	39	4653	79	5037

Zoll Luftdruck	Fuss Höhe	Zoll Luftdruck	Fuss Höhe	Zoll Luftdruck	Fuss Höhe
25. 80	5046	26. 20	5424	26. 60	5795
81	5056	21	5433	61	5804
82	5065	22	5442	62	5813
83	5075	23	5452	63	5822
84	5084	24	5461	64	5832
85	5095	25	5470	65	5841
86	5903	26	5480	66	5850
87	5112	27	5489	67	5860
88	5122	28	5498	68	5869
89	5132	29	5507	69	5879
25. 90	5142	26. 30	5516	26. 70	5888
91	5151	31	5526	71	5897
92	5160	32	5535	72	5906
93	5170	33	5544	73	5915
94	5179	34	5554	74	5924
95	5188	35	5563	75	5933
96	5297	36	5573	76	5942
97	5207	37	5582	77	5951
98	5216	38	5592	78	5960
99	5226	39	5601	79	5969
26. 00	5236	26. 40	5610	26. 80	5978
1	5245	41	5619	81	5988
2	5255	42	5628	82	5997
3	5264	43	5638	83	6006
4	5273	44	5647	84	6015
5	5283	45	5656	85	6024
6	5292	46	5665	86	6034
7	5302	47	5674	87	6043
8	5311	48	5684	88	6052
9	5320	49	5694	89	6061
26. 10	5330	26. 50	5703	26. 90	6070
11	5339	51	5712	91	6079
12	5348	52	5721	92	6088
13	5358	53	5731	93	6097
14	5367	54	5740	94	6106
15	5376	55	5749	95	6115
16	5386	56	5758	96	6124
17	5395	57	5767	97	6133
18	5405	58	5777	98	6142
19	5414	59	5786	99	6151

Zoll Luftdruck	Fuss Höhe	Zoll Luftdruck	Fuss Höhe	Zoll Luftdruck	Fuss Höhe
27.00	6161	27.40	6520	27.80	6877
1	6170	41	6528	81	6886
2	6178	42	6537	82	6894
3	6188	43	6546	83	6903
4	6197	44	6555	84	6910
5	6206	45	6564	85	6919
6	6215	46	6573	86	6928
7	6224	47	6581	87	6936
8	6233	48	6590	88	6945
9	6242	49	6699	89	6954
27.10	6251	27.50	6609	27.90	6964
11	6259	51	6618	91	6970
12	6268	52	6627	92	6980
13	6277	53	6635	93	6990
14	6286	54	6644	94	7000
15	6296	55	6653	95	7009
16	6305	56	6662	96	7018
17	6315	57	6671	97	7026
18	6324	58	6679	98	7035
19	6332	59	6689	99	7043
27.20	6342	27.60	6699	28.00	7052
21	6350	61	6708	1	7061
22	6359	62	6717	2	7070
23	6369	63	6726	3	7078
24	6378	64	6734	4	7087
25	6387	65	6743	5	7096
26	6396	66	6751	6	7105
27	6405	67	6760	7	7113
28	6413	68	6769	8	7122
29	6421	69	6779	9	7131
27.30	6430	27.70	6788	28.10	7139
31	6439	71	6797	11	7148
32	6448	72	6805	12	7157
33	6457	73	6814	13	7165
34	6466	74	6823	14	7174
35	6475	75	6832	15	7182
36	6484	76	6841	16	7191
37	6493	77	6849	17	7200
38	6502	78	6858	18	7209
39	6510	79	6867	19	7218

Zoll Luftdruck	Fuss Höhe	Zoll Luftdruck	Fuss Höhe	Zoll Luftdruck	Fuss Höhe
28. 20	7227	28. 60	7572	29. 00	7913
21	7235	61	7581	1	7921
22	7244	62	7590	2	7930
23	7254	63	7598	3	7939
24	7263	64	7607	4	7948
25	7271	65	7615	5	7956
26	7280	66	7624	6	7664
27	7289	67	7632	7	7973
28	7298	68	7641	8	7981
29	7307	69	7649	9	7989
28. 30	7316	28. 70	7658	29. 10	7998
31	7324	71	7666	11	8006
32	7331	72	7674	12	8014
33	7340	73	7683	13	8022
34	7348	74	7692	14	8031
35	7357	75	7701	15	8039
36	7365	76	7709	16	8048
37	7374	77	7717	17	8056
38	7383	78	7726	18	8064
39	7391	79	7734	19	8072
28. 40	7400	28. 80	7743	29. 20	8081
41	7408	81	7752	21	8089
42	7417	82	7760	22	8098
43	7426	83	7769	23	8806
44	7435	84	7777	24	8114
45	7444	85	7786	25	8125
46	7452	86	7794	26	8131
47	7461	87	7802	27	8139
48	7469	88	7811	28	8148
49	7478	89	7819	29	8157
28. 50	7486	28. 90	7828	29. 30	8165
51	7495	91	7836	31	8173
52	7503	92	7844	32	8181
53	7512	93	7853	33	8190
54	7520	94	7861	34	8198
55	7529	95	7870	35	8207
56	7537	96	7879	36	8215
57	7546	97	7887	37	8223
58	7555	98	7896	38	8231
59	7564	99	7904	39	8239

Zoll Luftdruck	Fuss Höhe	Zoll Luftdruck	Fuss Höhe	Zoll Luftdruck	Fuss Höhe
29. 40	8248	29. 60	8416	29. 80	8580
41	8256	61	8422	81	8588
42	8265	62	8432	82	8596
43	8273	63	8439	83	8605
44	8281	64	8448	84	8613
45	8289	65	8456	85	8621
46	8297	66	8464	86	8629
47	8306	67	8473	87	8637
48	8315	68	8481	88	8645
49	8323	69	8489	89	8654
29. 50	8332	29. 70	8497	29. 90	8662
51	8540	71	8505	91	8669
52	8348	72	8514	92	8678
53	8357	73	8522	93	8686
54	8365	74	8530	94	8694
55	8373	75	8538	95	8702
56	8381	76	8546	96	8711
57	8390	77	8554	97	8719
58	8398	78	8563	98	8727
59	8406	79	8572	99	8735
				30. 00	8745

Tafel III.

Luftdruck. Zoll.	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
21	1 F.	2.5	3.5	4.5	6.0	7.0	8.0	9.5	10.5
22	1 -	2.0	3.5	4.5	5.5	6.5	8.0	9.0	10.0
23	1 -	2.0	3.0	4.0	5.5	6.6	7.5	8.5	9.5
24	1 -	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	9.0
25	1 -	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0	8.5
26	1 -	2.0	3.0	4.0	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5
27	1 -	2.0	2.5	3.5	4.5	5.5	6.5	7.0	8.0
28	1 -	1.5	2.5	3.5	4.5	5.0	6.0	7.0	8.0
29	1 -	1.5	2.5	3.5	4.0	5.0	6.0	6.5	7.5
30	1 -	1.5	2.5	3.0	4.0	5.0	5.5	6.5	7.5

Tafel IV.

Geographische Breite.	Vermehrung der mittleren Temperatur der Luft.
0° bis 5°	1°.4 C.
6 — 13	1.3 -
14 — 18	1.2 -
19 — 22	1.1 -
23 — 27	0.9 -
27 — 29	0.8 -
30 — 32	0.6 -
33 — 35	0.5 -
36 — 38	0.4 -
39 — 41	0.3 -
42 — 43	0.1 -
44 — 45	0 -
45 — 46	0 -
47 — 48	0.1 -
49 — 51	0.2 -
52 — 54	0.4 -
55 — 57	0.5 -
58 — 60	0.6 -
61 — 63	0.8 -
64 — 67	0.9 -
68 — 71	1.1 -
72 — 76	1.2 -
77 — 84	1.3 -
85 — 90	1.4 -

Tafel V.

Gefundene Höhe.	Correction wegen zu gering angenommener Temperatur.	Gefundene Höhe.	Correction wegen zu gering angenommener Temperatur.
500 Fuss	1 Fuss	2598 Fuss	27 Fuss
707 —	2 —	2646 —	28 —
866 —	3 —	2693 —	29 —
1000 —	4 —	2739 —	30 —
1118 —	5 —	2784 —	31 —
1225 —	6 —	2828 —	32 —
1323 —	7 —	2872 —	33 —
1414 —	8 —	2916 —	34 —
1500 —	9 —	2958 —	35 —
1581 —	10 —	3000 —	36 —
1658 —	11 —	3041 —	37 —
1732 —	12 —	3082 —	38 —
1803 —	13 —	3123 —	39 —
1871 —	14 —	3162 —	40 —
1937 —	15 —	3202 —	41 —
2000 —	16 —	3240 —	42 —
2062 —	17 —	3279 —	43 —
2121 —	18 —	3317 —	44 —
2180 —	19 —	3354 —	45 —
2238 —	20 —	3391 —	46 —
2291 —	21 —	3428 —	47 —
2345 —	22 —	3464 —	48 —
2398 —	23 —	3500 —	49 —
2450 —	24 —	3536 —	50 —
2500 —	25 —	3571 —	51 —
2550 —	26 —	3616 —	52 —

V. Verbesserte und vereinfachte physikalische Instrumente.

1.

Das Monochord von Fischer.

(Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin aus den Jahren 1822—1823. Berlin. 1825.)

Das gewöhnliche Monochord, auf welchem die Saite horizontal liegt, ist ganz unbrauchbar zu genauen akustischen Versuchen; denn wenn man auch die Saite durch ein Gewicht spannt, so muss man es doch über eine Rolle leiten, woraus eine Reibung hervorgeht, welche die Bestimmung des Gewichtes, wodurch eigentlich die Saite gespannt ist, unmöglich macht. Die Saite muss vielmehr lothrecht und frei über eine genau getheilte Scale von Metall hängen, damit man auch ihre Länge, bei der sie einen bestimmten Ton gibt, möglichst genau messen könne. Alles dieses ist erreicht, wenn man das Instrument so einrichtet, wie Fig. 2 und Fig. 3 zeigt. In beiden Figuren ist AB ein dreieckiges, auf Stellschrauben stehendes, etwa 2 Zoll dickes und an jeder Seite 21 Z. langes Fussbret, in dessen Mitte sich eine vierkantige, inwendig hohle, hölzerne Säule CD, von 6 Fuss Höhe erhebt, die vorn $2\frac{1}{2}$ Z., an den Seiten 4 Z. breit, und oben bei C zur Reinhaltung des inneren Raumes mit einem beweglichen Deckel versehen ist. Dicht unter dem Deckel ist an der vorderen Seite eine Klemmzange G (Fig. 2) befestiget, die aus zwei hinlänglich starken, 2 Zoll langen Stäbchen von Messing besteht, welche durch eine Schraube scharf zusammengepresst wer-

den können. Die Saite wird an dieser Zange befestiget, und unten durch ein angehängtes Gewicht H gespannt, das am besten aus mehreren an einander gehängten und trennbaren Stücken besteht. In einer kleinen Entfernung von der vorderen Seite der Säule und parallel mit derselben ist ein starker 1 Zoll breiter Stab von Messing, bloss an seinen äussersten Enden m und n an der Säule befestiget, der sorgfältig geebnet, und an der vorderen Seite genau in einzelne Zolle getheilt ist. Oben bei m ist er mit einer dünnen Platte von Elfenbein bedeckt, deren vorderer Rand ungefähr 0,4 Z. über die Ebene der Scale hervorragt, und die an der vorderen Seite ein wenig abgeschrägt ist, so dass diese mit der oberen einen Winkel bildet, der etwas kleiner ist als 90°, und den oberen Steg der Saite abgibt, an dem sich der Nullpunct der Scale befindet. Damit diese fest aufliege, muss man das obere Ende der Saite ein wenig rückwärts in der Zange befestigen. Bei K befindet sich der zweite Steg, der dem vorigen ganz ähnlich, aber an der Scale verschiebbar ist, und an jeder Stelle durch eine Schraube an der Seite befestiget werden kann. Auf diesem Stege ist eine kleine schmale Messingplatte befestiget, die auf der Ebene der Scale liegt, genau einen Zoll lang, in hundert gleiche Theile getheilt ist, und dazu dient, um kleine Theile eines Zolls messen zu können. Man unterscheidet mit freiem Auge leicht einen dieser Theile, und kann mittelst einer Loupe selbst Tausendtel schätzen.

2.

Reid's Compensationspendel.

(Mathematics for practical men by Gregory. London. 1825. p. 252.)

Das von Reid in Wollwich erfundene Compensationspendel stellt Fig. 4 dar. AN ist eine eiserne Stange, Zz eine Zinkröhre, welche diese Stange in sich aufnehmen kann, in z damit fest verbunden ist, und in B die Linse trägt. Bei einer Temperaturerhöhung sinkt N wegen der Ausdehnung des Eisens, und B steigt wegen der Verlängerung der Zinkröhre. Verhält sich nun die Grösse der linearen Ausdehnung dieser Eisenstange bei einer bestimmten Temperaturerhöhung zu der des Zinkes bei derselben Wärmezunahme, wie die Länge der Zinkröhre zur Länge der Eisenstange, so wird das Pendel bei jeder Temperatur dieselbe Länge beibehalten.

3.

Kater's schwimmender Collimator.

(Philos. transact. of the roy. society of London. 1825. p. 1.)

Die Collimationslinie eines Fernrohres ist eine gerade Linie, welche durch das Centrum des Objectivglases und durch den Durchschnittspunct der Kreutzfäden in seinem Brennpuncte geht. Das Instrument, von dem hier die Rede ist, soll dazu dienen, die Lage dieser Linie gegen den Horizont oder gegen das Zenith bei einem astronomischen Kreise, mit welchem ein Fernrohr verbunden ist, zu bestimmen. Die Mittel, welche man bis jetzt zu diesem Zwecke anwendete, nämlich das Bleiloth, die Wasserwage und ein

künstlicher Horizont, sind oft mit grossen Unbequemlichkeiten verbunden, und führen nicht selten zu wenig genauen Resultaten. Schneller und sicherer führt nach Katers Behauptung ein schwimmender Collimator zum Zweck. Dieses Instrument besteht aus einem flachen Prisma, das mit zwei gleich langen, oben in Gestalt eines Y ausgearbeiteten verticalen Stützen versehen ist. Auf diese wird ein Fernrohr, das ein reines Bild gibt, übrigens wie immer beschaffen ist, und genau im Brennpuncte des Objectivglases zwei sich unter 15° durchkreuzende feine Fäden hat, welche durch Lampenlicht beleuchtet werden, mittelst Schnüre wohl befestiget. Obiges Prisma wird in einen Kasten gegeben, dessen Boden mit Quecksilber bedeckt ist, und es sammt den damit verbundenen Stücken schwimmend erhält, an den Seiten aber, welche den Gläsern des Fernrohres gegenüber stehen, Oeffnungen hat. Damit sich aber der schwimmende Körper nicht in horizontaler Richtung drehen kann, so hat er in dieser Richtung und senkrecht auf seine Länge zwei eiserne Stängelchen, die sich in verticalen, rinnenförmigen Ausschnitten des Kastens leicht bewegen können.

Es beruht nun der Gebrauch dieses Instrumentes auf zwei Grundsätzen. 1) darauf, dass der Schwimmer immer wieder genau in dieselbe horizontale Lage zurückkehrt, wenn er durch einen kleinen Stoss daraus gebracht wurde; 2) dass in einem astronomischen Fernrohre die Lichtstrahlen, welche vom Brennpuncte des Objectivglases ausfahren, und durch dieses Glas gehen, unter einander parallel sind, und wenn sie so in ein anderes Objectivglas eindringen, sich wieder

im Brennpuncte desselben vereinigen. Um die Richtigkeit des ersten Satzes zu zeigen, stellte Kater mehrere Versuche an. Er machte den prismatischen Schwimmer von Holz, $7\frac{1}{2}$ Z. lang, $4\frac{1}{2}$ Z. breit, und 1 Z. dick, den Kasten hingegen 8 Z. lang und 5 Z. breit; das Fernrohrt hatte ein achromatisches Objectiv von $7\frac{1}{2}$ Z. Brennweite und $1\frac{3}{4}$ Z. Oeffnung, die aber durch einen schwarzen Schirm auf $\frac{3}{4}$ Z. reducirt ward. Nahe an dieses Fernrohr wurde ein zweites von 30 Z. Brennweite und $2\frac{3}{4}$ Z. Oeffnung gestellt, welches mit einem Fadenmicrometer versehen war, an dessen Scale jeder Grad den Werth von 0,″6 hatte. Die Stellung dieses Instrumentes war fest und das Objectiv dem des vorigen zugewendet. Zwischen beide wurde ein geschwärzter Schirm mit einer kreisförmigen Oeffnung gestellt, um alles falsche Licht abzuhalten. Nun wurde der Micrometerfaden des befestigten Fernrohres horizontal und so gestellt, dass er den Winkel der zwei Kreuzfäden des anderen genau halbirte, hierauf der Schwimmer etwas verrückt, sich selbst überlassen, und darnach neuerdings der Micrometerfaden auf den Halbirungspunct gestellt u. s. w.

Nun wurden aus mehreren beobachteten Anzeigen des Micrometers die Differenzen genommen, um die Abweichung des Schwimmers von der horizontalen Lage zu erfahren. Von diesen Differenzen schloss man dann auf den Fehler, den man mit dem unbeweglichen Fernrohr machen kann, wenn man annimmt, der Schwimmer komme immer wieder in dieselbe horizontale Lage zurück. Hätte man z. B. an zwei Beobachtungen den Stand des Micrometers 83,9

und 85,4 gefunden, mithin eine Differenz von + 1,5 so bekommt man als Fehler 1,5 × 0″,6 = + 0″.45.

Auf gleiche Weise verfuhr Kater mit einem eisernen 8 Z. langen, 4 Z. breiten, 0,2 Z. dicken und 2 Pfund 10 Loth schweren Schwimmer, und um den Einfluss der Grösse dieses Instrumentes zu erfahren mit noch zwei anderen von 12 Z. Länge, 4 Z. Breite, deren einer ¼ Z., der andere ½ Z. dick war. Um den Einfluss der geringen Adhäsion zwischen Eisen und Quecksilber aufzuheben, wurde er durch Eintauchen in Salpetersäure an der Oberfläche oxydirt, und hierauf polirt.

Unter 151 so erhaltenen Resultaten ist der Fehler nur bei 28 positiv, bei den übrigen negativ; 123 derselben geben eine Differenz, die geringer ist als 1″, eine einzige kommt von 2″,58 und eine von 2″,01 vor, 10 liegen zwischen 2″ und 1½″, 16 zwischen 1½″ und 1. Im Mittel überschreitet der mögliche Fehler von 4 auf einander folgenden Beobachtungen nicht 0″,4. Man kann also wohl annehmen, dass der Schwimmer sich immer parallel bleibt, besonders wenn er in grossem Massstabe ausgeführt und durch Salpetersäure gereiniget ist. Will man nun z. B. dieses Instrument bei einem Mauerkreise anwenden, mit dem man die Höhe eines Sternes im Meridiane beobachten will, so richte man das Fernrohr des Kreises so, dass der Stern den horizontalen Faden des Mikrometers trifft, hierauf aber so, dass man durch dasselbe die Kreuzfäden in dem fest gegen Süden aufgestellten Fernrohr des Collimators mitten im Gesichtsfelde deutlich sieht und der horizontale Faden das Fadenkreuz desselben genau halbirt, und widerhohlt dieses öfters, nachdem

man den Schwimmer etwas erschüttert hat. Es sey z. B. die mittlere Anzeige des Kreises 7′ 30″. Hierauf überträgt man den Collimator auf die Nordseite und widerhohlt dieses Verfahren. Es sey 8′ 40″ der Stand des Fernrohres am Kreise. In diesem Falle ist nun das Mittel zwischen 7′ 30″ und 8′ 40″ nämlich 8′ 5″ die wahrscheinliche Neigung des Collimators gegen den Horizont nnd die Differenz zwischen dieser und 7′ 30″ nämlich 0′ 35″ ist die Grösse, die man zu allen an der Südseite gemessenen Höhen addiren und von den an der Nordseite gemessenen abziehen muss.

4.

Verbesserte Galvanische Batterie von John Hart in Glasgow.

(The Edinburgh Journal of Science, Nr. VII.)

Die auf gewöhnliche Art aufgebaute Volta'sche Säule hat den Nachtheil, dass die Feuchtigkeit durch das Gewicht der darüber befindlichen Platten leicht ausgepresst wird, über die Ränder derselben herablauft, und die Isolirung aufhebt.

Cruikshank hat zwar diesem Uebel durch die Angabe des Trogapparates abgeholfen, allein selbst dieser hat seine Unbequemlichkeiten. Das Holz der Tröge wirft sich wegen des Einflusses der Feuchtigkeit, der Kitt, wodurch die Platten befestiget sind, bekommt Sprünge, und wenn die Flüssigkeit in dieselben eindringt, ist die Isolirung gestört und kann nur dadurch wieder hergestellt werden, dass man den Kit mit einem heissen Eisen überfährt, welches eine mühvolle und lästige Arbeit ist. In Children's Batterie

(welche eine Combination von Volta's Becherapparat und Cruikshank's Trogapparat ist), wird statt des hölzernen Troges einer aus Porcellan genommen. Diese hat aber, abgesehen davon, dass er viel kostet, die Nachtheile, dass er einen grossen Raum einnimmt, leicht gebrochen werden kann, und wegen der Adhäsion der Feuchtigkeit die Isolirung unvollkommen macht, besonders, wenn die leitente saure Flüssigkeit so stark ist, dass ein Aufbrausen entsteht. Denn da werden kleine Kügelchen dieser Flüssigkeit in die Höhe getrieben, fallen auf den Rand der Zellen herab und machen ihn nass, wodurch man gezwungen wird, denselben öfters abzutrocknen. Wollaston brachte zwar an Children's Apparat eine Verbesserung an, wodurch sein Wärmeerregungs-Vermögen bedeutend gesteigert wird, indem er die Kupferplatte um die Zinkplatte bog, allein dadurch ist der vorige nachtheilige Umstand nicht aufgehoben. Diese Verbesserung brachte aber Hart auf den Gedanken, an der doppelten Kupferplatte auch noch einen Boden und Seitenwände anzubringen und sie so zu völligen Zellen umzubilden. Zu diesem Zweck werden die Kupferplatten anfänglich so zugeschnitten, wie Fig. 5 zeigt, und dann zu einer Kapsel Fig. 6 geformt. In die unteren Ecken wird etwas Zinn gegossen, um sie vollkommen zu schliessen und zugleich den electrischen Zustand des Kupfers zu steigern. Fig. 7 stellt die Zinkplatte vor, die nach der gewöhnlichen Art gegossen wird, und von oben eine eingegossene Schraube hat, wodurch eine Leiste angeschraubt werden kann. Fig. 8 stellt einen Durchschnitt der Batterie vor, aus dem man ersieht, wie die erste Kupfer-

kapsel mit der zweiten Zinkplatte u. s. w. verbunden ist. Die Zinkplatten sind, wie in Wollaston's Apparat mittelst dreier dünner Holzstücke in der Zelle enthalten, und alles zusammen ist an eine vorläufig gut gefirnisste hölzerne Leiste befestigt. Bei einem Vergleiche einer solchen Batterie mit einer nach Wollaston eingerichteten, die eben so viele Plattenpaare enthält, wovon aber jedes die doppelte Oberfläche von jenen hatte, wurde die zuerst von Gay-Lussac und Thenard empfohlene Methode angewendet, nämlich das Gas gemessen, welches man aus dem durch die Electricität zersetzten Wasser erhielt. Dabei zeigte sich, dass Wollaston's Apparat erst in 17 Minuten dieselbe Gasmenge gab, wie die hier beschriebene Batterie in 14 Minuten.

Es muss aber hier bemerkt werden, dass man auf dem Continente seit langem Batterien mit kupfernen Kapseln braucht, die Verbesserung ist also blos darin gelegen, dass diese Kapseln aufgehängt sind, und daher nicht so leicht durch ein Ueberlaufen der Flüssigkeit die Isolirung aufgehoben wird, wie bei den bisher gebräuchlichen Apparaten, bei denen gewöhnlich eine ganze Parthie von Kupferkapseln ein gemeinschaftliches Fussgestell hat, auch die angebliche Steigerung des electrischen Zustandes des Kupfers durch Zinn ist meines Wissens neu (B).

5.

Verbesserte Eudiometer von Hare, Professor der Chemie in Pensylvanien.

(The philosophical magazine and journal. January. 1826.)

1.

Das verbesserte Eudiometer, bei welchem Wasserstoffgas als eudiometrisches Mittel angewendet wird, ist Fig. 9 abgebildet. A ist ein gläsernes Gefäss, das

oben eine kleine Oeffnung hat, unten aber mit einer metallenen Fassung B versehen ist. Am Boden dieser Fassung ragen zwei metallene Drähte hervor, die sich weit in's Innere erstrecken und in der Zeichnung sichtbar sind; am Ende sind sie durch einen dünnen Platindraht in Verbindung. Einer dieser Drähte ist in den Boden der Fassung eingelöthet, der andere hingegen geht luftdicht durch eine Lederbüchse, und steht mit der Fassung in keiner metallinischen Berührung. D ist eine mit dem Glasgefässe communicirende Röhre, die als Messröhre dient. Zu diesem Zwecke ist sie mit einem Kolben aus gutem, in Fett gebeitzten und stark zusammengepressten Leder versehen, der mittelst einer graduirten Kolbenstange E herausgezogen und hineingeschoben werden kann, und nach seiner Stellung die Grösse des inneren Raumes bestimmt. F endlich ist eine Klappe, welche die obere Oeffnung des Glasgefässes luftdicht schliesst, durch eine Feder stark angedrückt wird, aber durch den Druck eines Fingers in a geöffnet werden kann. Dieses Instrument lässt sich nach Hare's Behauptung so leicht brauchen, dass man in einigen Minuten mehrere Versuche machen kann.

Will man sich dieses Instrumentes bedienen, so muss es voll Wasser und frei von Luftblasen seyn, (daher ist der luftdichte Schluss aller Theile eine nothwendige Eigenschaft *) der Kolben muss ganz

*) Um diese Eigenschaft zu erkennen, und das Instrument mit Wasser zu füllen, tauche man das Gefäss A in Wasser, öffne die Klappe, und ziehe die Kolbenstange aus und ein, damit die Luft hinausgetrieben werde, und dafür Wasser hineindringe; dabei muss man aber den Apparat so halten, dass alle

hineingetrieben und die Klappe durch den Druck eines Fingers auf den Hebelarm geöffnet werden. Will man atmosphärische Luft prüfen, so zieht man die Kolbenstange um 200 Theile ihrer Scale heraus, wodurch ein entsprechendes Volumen Luft in den Glasrecipienten gelangt, und lässt die Klappe los, damit sie die Oeffnung schliesse. Hierauf taucht man das Glasgefäss in einen mit Hydrogengas gefüllten Recipienten, hebt die Klappe und zieht den Kolben um neue 100 Theile zurück, lässt dann die Klappe wieder sich schliessen und nimmt den Apparat aus dem Wasser. Bringt man nun die beiden an der Metallfassung hervorstehenden Drähte mit den Polen eines Calorimotors in Berührung, so fängt der Platindraht zu glühen an, und es erfolgt die beabsichtigte Explosion. Taucht man nun wieder den Apparat unter das Wasser der pneumatischen Wanne, so dass die Oeffnung desselben gerade unter den Wasserspiegel zu stehen kommt, so tritt dasselbe in das Instrument ein, und füllt das durch die Verdichtung der Gase entstandene Vacuum aus. Treibt man nun die übrige Luft durch den Kolben hinaus, so wird der Abgang an Luft dem Volumen nach gleich seyn dem Stücke der hervorstehenden Kolbenstange, und ihr Verhältniss zu den untersuchten Volumen erkennt man aus der Scale an dieser Stange. Bei einer Untersuchung des oben ge-

---

Luft in den Glasrecipienten gehen kann. Ist dieses geschehen, so schliesst man die Oeffnung mittelst der Klappe, und hebt das Instrument aus dem Wasser heraus, zieht den Kolben um einige Zoll zurück, und sieht, ob keine Luft eindringen kann. Ist alles luftdicht, so werden die Blasen, die sich im entstandenen Vacuum bilden, verschwinden, sobald man den Kolben wieder hineingedrückt hat.

nannten Gasgemenges betrug das Deficit 126 Mass, während es nach der Theorie 120 betragen sollte. Allein Hare sagt auch, er bediente sich des Hydrogens, welches mittelst des verkäuflichen Zinkes erzeugt ward und nahm auf den Kohlensäuregehalt der Luft, der sich beim Versuch mit Wasser verband, keine Rücksicht.

Will man Sauerstoffgas auf Hydrogen oder umgekehrt Hydrogen auf Sauerstoffgas prüfen, so muss man beide Luftarten im Recipienten an der pneumatischen Wanne in Bereitschaft halten, und wie beim vorigen Versuch successiv von einem und dem andern die gehörige Portion in das Glasgefäss des Eudiometers leiten.

Um statt des glühenden Platindrahtes den electrischen Funken anwenden zu können, braucht man nur das Glasgefäss zum Abschrauben von der Metallfassung einzurichten und statt der vorhin beschriebenen Fassung eine anzubringen, wo statt des Drahtes zwei Knöpfchen sind *).

2.

So brauchbar dieses Instrument auch ist, wenn man mit Wasser experimentirt, so ist es doch bei Quecksilber nicht anwendbar, weil bei dem grossen Gewichte dieser Flüssigkeit die Lage des Apparates wäh-

*) Wem der Gebrauch eines Calorimotors zum Glühendmachen des Drahtes zu unbequem fällt, der kann sich wohl das ganze Geschäft sehr abkürzen, wenn er an eines der hervorstehenden Drahtstücke einen länglichten Zinkstreifen, an das andere einen Kupferstreifen, der ersteren wie ein Ring umfasst, ohne ihn zu berühren, anlöthet, und diese beiden Metalle in verdünnte Säure tauchet, wenn er den Platindraht zum Glühen bringen will. Wenn der Zinkstreifen drei Quadratzoll Oberfläche hat, wird man seinen Zweck nicht leicht verfehlen (B).

rend des Gebrauches einen zu grossen Einfluss auf die Resultate hat. Das in Fig. 10 abgebildete Instrument ist mit einer Vorrichtung versehen, wodurch man das innere Gas mit der äusseren Luft in ein genaues Gleichgewicht setzen kann. Es unterscheidet sich von dem vorhin beschriebenen dadurch, dass es unten eine Erweiterung F hat, die als Fussgestell dient, mit einem Wechselhahne C versehen ist, durch welchen man den Raum im Recipienten mit dem unter den Kolben oder mit der äussern Luft in Communication setzen kann; ferner durch den Aufsatz W, der mit dem Recipienten mittelst eines einfach durchbohrten Hahnes A in Verbindung gesetzt werden kann und aus drei concentrischen Röhren bestehet. Die innere ist eine enge Kupferröhre, welche mit dem Recipienten communicirt und mittelst des Hahnes A abgeschlossen werden kann, oben aber offen ist; die zweite ist eine Glasröhre, die unten offen bleibt, oben aber nach Umständen mit einer Schraube geschlossen werden kann; die äusserste Röhre ist auch von Glas, oben ganz offen, unten in die Fassung des ganzen Apparates eingekittet. Der Raum zwischen diesen drei Röhren ist zum Theil mit Wasser gefüllt. Zu diesem Eudiometer braucht man noch einen Hilfsapparat Fig. 11, der genau wie der vorhin beschriebene getheilt und eingerichtet wird, nur mit dem Unterschiede, dass er kleiner ist. Er dient zum Abmessen der Luftmengen *).

*) Um diese Messung genau vornehmen zu können, muss das Hülfseudiometer luftdicht, und frei von allen Luftblasen seyn, daher man es auf die vorher angegebene Weise prüfen muss. Das Daseyn von Luftblasen zeigt sich aus der Vergrösserung des Vacuums, wenn man den Glasrecipienten aufwärts hält,

Will man mit diesen Instrumenten atmosphärische Luft untersuchen, so füllt man zuerst das Hilfseudiometer mit Wasserstoffgas, hierauf den Glasrecipienten des Hauptinstrumentes mit Quecksilber, und stellt es mit dem Trichter auf die Brücke der pneumatischen Quecksilberwanne, dreht den Wechselhahn so, dass zwischen dem Trichter und dem Recipienten die Communication hergestellt ist, und füllt das Wasserstoffgas aus dem Hilfsapparate ein. Schliesst man den Trichter vom Recipienten ab, öffnet die Verbindung zwischen diesem und der Röhre mit dem Kolben und zugleich auch mit dem Aufsatze W, drückt die Kolbenstange bis ans Heft hinein, so wird das Wasserstoffgas in die Röhren hinaufgetrieben, und vertreibt die atmosphärische Luft daraus. Hierauf schliesst man den Aufsatz W vom Recipienten ab, setzt diesen mit dem Trichter in Verbindung, und zieht den Kolben möglichst weit heraus. Bei dieser Einrichtung der Dinge bringt man successiv 100 Th. Hydrogengas und 200 Th. atmosphärische Luft mittelst

---

und aus seinem Verschwinden, wenn er abwärts gehalten wird. Das Gewicht des Quecksilbers bringt zwar stets eine kleine Erweiterung der Röhre hervor, aber der Effect wird durch die kleinste Luftblase merklich vergrössert. Bringt man den Recipienten in das Gefäss, welches die aufzunehmende Luft enthält, so muss man durch Herausziehen des Kolbens um 10 p. C. mehr Luft hinein bringen als nöthig ist. Hebt man dann das Eudiometer etwas vom Quecksilber weg, durch eine kleine Aenderung seiner Lage, so kann man den Kolben leicht auf den richtigen Punct der Scale stellen, und dann durch ein momentanes Oeffnen der Klappe die überschüssige Luft entweichen lassen. Das abgemessene und eingeschlossene Gas wird in das Haupteudiometer übertragen, indem man das oberste Ende des Hilfsinstrumentes unter den Trichter von jenem bringt, die Klappe öffnet, und den Kolben hineindrückt.

des Hilfseudiometers in den Glasrecipienten, hebt dann seine Communication mit dem Trichter auf, stellt die mit dem Aufsatz W her, und treibt den Kolben so weit hinein, bis der Wasserstand in den Röhren anzeigt, dass der Druck des eingeschlossenen Gases dem der äusseren Luft gleich kommt. Ist dieses der Fall, so entzündet man das Gasgemenge. Dieses wird durch galvanische Wirkung hervorgebracht, und geschieht durch Leitungsdrähte, die mit den Polen des Calorimotors in Verbindung stehen. Einer dieser Drähte endiget sich in ein eisernes, in Quecksilber getauchtes Stück, der andere ist an den isolirten Draht des Eudiometers befestiget. Vor der Entzündung des Gasgemenges muss man die Anzahl der Grade, um welche die Kolbenstange herausgezogen worden ist, genau anmerken, und nach derselben sie so weit hineintreiben, bis das rückständige Gas in demselben Grade verdichtet ist, wie zuvor. Dazu muss man aber den Hahn A langsam öffnen. Zieht man nun die ausserhalb der Röhre befindlichen Grade der Kolbenstange von denen ab, die vor der Explosion bemerkt wurden, so gibt der Rest die durch Entzündung hervorgebrachte Verminderung, wovon ein Drittel auf Rechnung des consumirten Sauerstoffgases kommt. Die verdichtete Luftmenge findet man auch, wenn man den Rest nach der Verdichtung durch den Kolben hinaus treibt, wobei man sein Quantum aus der Scale an der Kolbenstange abnimmt und es von der Luftmenge vor der Explosion abzieht.

Es muss noch angemerkt werden, dass beim Wasserstoffgaseudiometer nur eines der beiden Gase genau gemessen werden muss. Analysirt man brenn-

bares Gas mit Sauerstoffgas, oder umgekehrt, so darf man nur das Mass von dem Gas, welches untersucht wird, und seinen Abgang nach der Explosion genau bestimmen. Das andere Gas soll man im Ueberflusse anwenden. Bei der Untersuchung einer Mischung auf Sauerstoffgas wird der Aufsatz W mit Wasserstoffgas, bei der Prüfung auf Wasserstoffgas mit atmosphärischer Luft gefüllt.

Es ist kaum nöthig anzuführen, dass alle Metalltheile dieses Eudiometers aus Eisen oder Stahl verfertiget werden müssen, damit sie nicht vom Quecksilber angegriffen werden.

3.

Zu Versuchen mit Salpetergas, Lösungen von Sulphureten etc. leistet der Fig. 12 abgebildete Apparat gute Dienste, zu dessen bequemerer Anwendung auch noch ein Recipient so eingerichtet wird, wie Fig. 13 zeigt. Man sieht, dass er sich in der pneumatischen Wanne nach Belieben erhöhen und senken lässt. Man füllt diesen Recipienten mit Wasser, bringt mittelst des Eudiometers 100 Th. atmosphärische Luft und eine gleiche Quantität Salpetergas hinein, zieht dieses Gemenge, nachdem die Mischung vor sich gegangen ist, wieder in das Eudiometergefäss zurück, und drückt es wieder heraus, damit es durch das Wasser gehen muss, und die Absorption der salpetrigen Säure befördert werde. Ist dieses geschehen, so wird der Rest neuerdings vom Eudiometer aufgenommen, in die Luft oder in den abgebildeten Recipienten hinausgetrieben, und die Anzahl Grade an der Kolbenstange bemerkt, um die man sie während des

Heraustreibens der übrigen Luft hineinschieben musste. Wie richtig man bei dieser Operation messen kann, lässt sich daraus beurtheilen, dass man ein bestimmtes Mass Luft in den Recipienten bringt, es hierauf wieder in das Eudiometer zurückführt, und dabei das Volumen bemerkt.

Auf ähnliche Weise verfährt man auch, wenn man Sulphurete etc. als Prüfungsmittel anwendet.

5.

Ein einfacher Apparat zur Darstellung der electro-magnetischen Erscheinungen von A. Baumgartner.

Wenn auch die electro-magnetischen Phänomene für die Meisten den Reiz der Neuheit schon verloren haben, so behalten sie doch noch für jeden Freund der Naturwissenschaft ein grosses Interesse, so dass ein Apparat, welcher mit wenig Mühe und Kosten, und mittelst geringer electro-motorischer Kräfte, die Hauptfacta, die in dieses Gebiet gehören, darzustellen gestattet, für Manchem nicht uninteressant seyn dürfte, besonders wenn man der Beschreibung desselben die Versicherung beisetzen kann, dass er nicht bloss im Kopfe entworfen, sondern auch wirklich ausgeführt worden ist, und das leistet, wozu er bestimmt ist.

Von der Art ist der in Fig. 14 und 15 mit allen seinen Bestandtheilen abgebildete Apparat. A stellt das Fussgestell des Instrumentes vor, und ist ein etwa 20 Z. langes, 10 Z. breites, dickes Bret, das mit Stellschrauben versehen ist, und an der oberen Seite

vier ins Holz eingelassene, durchbohrte Metallplättchen a, a, a', a' hat. Zwischen jedem Paare dieser Plättchen beginnt ein rinnenförmiger, etwa 2 L. tiefer und eben so breiter Ausschnitt bP, an deren einem eine Verlängerung mit einer bedeutenden Erweiterung c angebracht ist. Diese Ausschnitte werden vor dem Gebrauche des Instrumentes mit Quecksilber gefüllt, nachdem man die Platte mittelst der Stellschrauben horizontal gestellt, und hierauf die Erweiterungen P mit den Polardrähten einer thätigen Volta'schen Säule in Verbindung gebracht hat. Damit man nicht bei einer etwa zu reichlichen Zugabe des Quecksilbers daran einen Verlust erleide, thut man gut, wenn das Bret ringsum einen hervorstehenden Rand hat, und gleichsam eine sehr seichte Wanne vorstellt. Ueber das Ende b jeder der zwei rinnenförmigen Ausschnitte befestiget man eine Säule, wie die, welche B im verticalen Durchschnitte darstellt. Sie besteht aus einer gläsernen, etwa 6 Z. langen, ½ Z. weiten Röhre, welche mit dem unteren Ende in eine Fassung mit einer breiten, ebenen Basis eingekittet ist, oben aber einen beweglichen, in der Mitte durchbohrten, und in der Oeffnung mit einem 1 Z. langen federnden Röhrchen versehenen Deckel f hat, der wie eine Fassung an die Röhre sich anschliesst, und ohne Wanken auf ihr festhält. Die Bodenplatte der unteren Fassung hat zwei hervorragende Stifte d, d, welche in die Oeffnungen von a, a passen, und bewirken, dass die Säule auf dem Brete fest steht, und doch leicht weggenommen werden kann. Diese Säule dient, um den electrischen Strom, der in P ein-

tritt und nach b gelangt, weiter zu leiten. Zu diesem Zwecke hat die Platte der unteren Fassung zwischen dd eine Oeffnung, durch welche man einen Kupferdraht bis gegen das obere Ende der Glasröhre schieben kann, und wovon ein Stücke unten heraus ragt, das etwas kürzer ist als die Stifte d. Oben ist dieser Draht mit einer kupfernen Schale versehen. Füllt man diese Schale mit Quecksilber, drückt die Säule mit den Stiften d, d in die in a angebrachten Vertiefungen, so steht der innere Kupferdraht mit dem unteren Ende in der Rinne bei b, mithin kann der electriche Strom von P bis ins Quecksilber der oberen Schale gelangen.

Die bis itzt angegebenen Bestandtheile braucht man zu jedem einzelnen electro-magnetischen Versuche; nur muss man bei einigen zwei solche Säulen einsetzen, bei anderen reicht man aber mit einer einzigen aus. Uebrigens ist es wohl begreiflich, dass zu jedem einzelnen Phänomen noch ein eigener Bestandtheil nothwendig sey.

Zum Oested'schen Fundamentalversuch braucht man einen Kupferdraht, der wie C gebogen ist, und mit den beiden umgebogenen Enden in die Oeffnung am Deckel f der beiden Säulen so weit hineingeschoben wird, bis sie das Quecksilber im inneren Schälchen erreichen. Statt dieses geraden Drahtes kann man auch die Spirale D mit eben so gebogenen Enden, wohl auch den bauchicht ausgebogenen Draht E brauchen. D leistet auch zur Magnetisirung von Stahlnadeln mittelst des electrischen Stromes gehörige Dienste. Fig. 15 stellt den ganzen Apparat bei diesem Versuche vor.

Um das Phänomen der Anziehung und Abstossung zweier Polardrähte hervorzubringen, braucht man zwei wie F gebogene Drähte, deren sich jeder mit einem Ende durch den Deckel f einer Säule B bis ins Quecksilber in der kupfernen Schale schieben lässt, und darin fest hält, am anderen Ende aber eine löffelförmige Vertiefung hat, zur Aufnahme eines Quecksilbertropfens und einen kleinen Ausschnitt, welcher den beweglichen Polardrähten zur Pfanne dienen. Der eine dieser Polardrähte ist in G vorgestellt, er hat in g, g die Axen, um die er völlig aequilibrirt ist, und mit denen er in die genannten Ausschnitte zu liegen kommt, so dass sie zugleich den Quecksilbertropfen im Löffelchen von F berühren. Der zweite Polardraht braucht nicht aequilibrirt zu seyn. Er hat eine verschiedene Gestalt, je nachdem man die Anziehung oder die Abstossung der Drähte erfahren will. Zu ersterem Zwecke sieht er aus wie H, wo das horizontale Stück etwa um 1 L. länger ist, als im aequilibrirten Stücke G, so dass die Haken h h die beiden Drähte F etwas weniges hinter dem Löffel fassen, und er dann frei neben dem aequilibrirten Stücke G hängt. Zum Behufe der Abstossung, wo die electrischen Ströme eine entgegengesetzte Richtung haben müssen, dient der Draht von der Gestalt I, der so eingerichtet ist, dass die neben einander bei k hinlaufenden Stücke sich nicht leitend berühren. Man leistet dieses durch einen seidenen oder harzigen Ueberzug. Uebrigens wird dieses Stück wie das vorige H angewendet.

Will man über das Rotiren eines Polardrahtes um einen Magnet Versuche machen, so bedient man

sich des Apparates K, bei welchem l ein nach der Zeichnung gebogener Kupferdraht ist, der am kürzeren Ende ein kleines Häkchen hat, in welches ein leichter Metallfaden eingehängt ist, welcher gegen das andere Ende ein kleines Glasknöpfchen trägt. Sowohl das genannte Häkchen, als der beweglich darein gehängte Draht befindet sich in einer etwa ¾ Z. weiten, 8 Z. hohen Glasröhre, die mittelst eines durchbohrten Korkstoppels am Drahte l befestiget ist, und am unteren Ende einen ähnlichen Stoppel zum Boden hat, durch den ein weiches cylindrisches Stück Eisen m, und ein anderes Kupferstück n geht. Füllt man in die hier besprochene Glasröhre so viel reines Quecksilber, bis der bewegliche, in das Häkchen eingehängte Draht mit der äussersten Spitze darein getaucht ist, steckt ferner das freie Ende des Drahtes l in die obere Hülse der Säule B, die über aa steht, und zwar so, dass das Ende dieses Drahtes in die mit Quecksilber gefüllte Schale der Glasröhre von B zu stehen kommt, und das Drahtstück n des Bestandtheils K in das Quecksilber-Bassin des Bretes A passt, so braucht man nur einen starken Magnet an m zu halten, damit dieses durch Vertheilung magnetisirt werde, um das beabsichtigte Herumkreisen des Polardrahtes hervorzubringen. Der Weg, den in diesem Falle der electrische Strom nimmt, ist leicht zu erkennen, indem derselbe z. B. bei P eintritt, in der Säule B aufsteigt, in den Draht bei K übergeht, durch diesen mittelst n in c anlangt, und durch P wieder entweicht. Man darf kaum erwähnen, dass hier nur eine der zwei Säulen B nöthig ist, dass aber auch die Anwesenheit der zweiten nichts schadet.

Derselbe Versuch lässt sich noch auf eine andere Art anstellen, und zwar mittelst des Hülfsapparates L. Dieser besteht aus einem hölzernen, etwa $2\frac{1}{2}$ Zoll im Durchmesser haltenden, auf drei Füsscheu ruhenden Postamente o, das oben eine schüsselförmige Vertiefung hat, um Quecksilber aufnehmen zu können, und durch deren Mitte ein cylindrischer Magnet geht, welcher sich oben in eine scharfe Spitze endiget. Ueber dieser schwebt eine beiderseits offene, oben mit einem Biegel versehene Kupferröhre, die den Polardraht vorstellt, indem der Biegel auf der Spitze des Magnetes anfsitzt; unten reicht sie bis in das Quecksilber. Bei der Anwendung versieht man das hölzerne Gestell mit zwei leitenden Drähten p und p′, die einerseits in das Quecksilber reichen, in dem sich der Polardraht bewegen soll, mit dem anderen Ende aber das Quecksilber in b und c des Gestelles A berühren, wenn L mit den Füssen auf dieses Bret gestellt wird.

Um die Bewegung eines Magnetes um einen Polardraht hervorzubringen, wende man den Apparat M an. Dieser besteht aus einem hölzernen Postamente, welches dem von L ganz ähnlich ist, auch wie dieses auf Füssen ruht, nur hat es statt des Magnetes einen kupfernen Stift, der nach unten die Länge hat wie einer der drei Füsse des Postamentes, oder gar noch etwas mehr, oben aber nur wenig über den Boden hervorragt. Dieses wird beim Versuche auf das Bret A so gestellt, dass der Kupferdraht in das Quecksilber in c eingetaucht ist, und die Vertiefung von M mit Quecksilber angefüllt. Dann bedient man sich des zu diesem Apparat gehörigen Drahtes q, der sich am

kürzeren Arme in ein etwa 1 Z. langes dünnes Stück aus Platindraht endiget, steckt ihn mit dem anderen Ende durch die Fassung f der über aa befindlichen Säule B in das Quecksilber in B, und gibt ihm die Richtung, dass das Platinstück das Quecksilber des Gefässes M berührt. Auf dieses Quecksilber wird dann eine magnetisirte Nadel gestellt, die durch Platin schwimmend erhalten wird, und die den beweglichen Magnet vorstellt.

Um die Wirkung eines Magnetes auf einen beweglichen seitwärts angebrachten, rechtwinkelig gegen seine Axe gestellten Polardraht zu erfahren, darf man nur vom Apparate K die Glasröhre wegnehmen, den Draht l in die Säule B so anbringen, wie beim Faraday'schen Drehversuche, und den beweglichen Draht in das Quecksilber c des Bretes A reichen lassen. Legt man zur Seite dieses Drahtes einen Magnet auf das Bret A, so wird der Polardraht aus dem Quecksilberbassin c hinausgeworfen.

Will man diese Wirkung auf ein Rad anwenden, wie es Barlow zuerst gethan hat, so bediene man sich des Apparates N, der aus einem Kupferdrahte besteht, welcher an einem Ende in eine Gabel ausgeht, die selbst wieder an jeder Zinke ein kleines Schälchen hat zur Aufnahme eines Quecksilbertropfens; in diese Schälchen, die auch einen kleinen Ausschnitt haben müssen (um kleine Pfännchen vorzustellen) lege man das kupferne, recht wohl aequilibrirte, mit einer dünnen Axe aus Eisen oder Platin versehene, sternförmig ausgeschnittene Rädchen, gebe in jedes Schälchen der Gabel s einen Quecksilbertropfen, der die Axe des Rades berührt, und bringe diesen Apparat

mit dem anderen Ende des Drahtes in die über aa befestigte Säule B, damit es mit dem Quecksilber in B communicire und eine Spitze des Rädchens das Quecksilber im Bassin c des Bretes A berührt. Legt man nun parallel mit der Ebene des Rades und nahe an dasselbe zwei starke Magnete an beide Seiten desselben, jedoch so, dass sie mit entgegengesetzten Polen nach einerlei Richtung stehen, so beginnt die Bewegung des Rades mit einer wunderbaren Geschwindigkeit.

Um die Bewegung eines Magnetes um seine eigene Axe hervorzubringen, brauche man den Apparat O. Dieser hat eine hölzerne Basis wie M und L, in welcher sich die Pfanne befindet, worin sich der Magnet drehen soll, und durch dessen Boden ein Drahtstück geht, das nach unten so lang ist wie ein Fuss des Postamentes, oder noch etwas länger, nach oben aber kaum über den hölzernen Boden hervorragt; zur Seite hat er eine verticale Säule t, welche sich oben gegen die Mitte des Postamentes hinbiegt und in ein kleines kupfernes Schälchen sich endigt, das am Boden eine kleine Oeffnung hat. Durch diese Oeffnung wird der Magnet mit seiner oberen Spitze gesteckt und sie dient ihm als Pfanne, während die untere in der Vertiefung des hölzernen Bodens ruht. Rings um den Magnet geht ein etwa 1 Zoll hoher kupferner Ring; der auf demselben Boden feststeht. An die Säule t ist ein anderes dünnes Metallstück u eingelötnet. Beim Gebrauche stellt man diesen Apparat auf das Bret A, setzt die Säule B über aa, bringt in deren obere Fassung den Draht F gehörig an, gibt in das Löffelchen einen Tropfen Quecksilber, stellt O so, dass die Spitze

des Drahtes u in dieses Löffelchen zu stehen komme, und das zwischen den Füssen hervorragende Drahtstück in das Quecksilberbassin c reiche. Gibt man nun in die Schale von t zur Herstellung einer bessern Leitung einen Tropfen Quecksilber, und giesst auch davon in den kupfernen Ring, so wird man bald die Bewegung des Magnetes zu Stande gebracht sehen.

Es bleibt nun noch übrig, den Einfluss des Erdmagnetismus auf bewegliche Polardrähte zu zeigen, und zwar auf einen um eine verticale Axe beweglichen und auf einen, der sich um seine horizontale Axe bewegt.

Zu ersterem Zwecke dient die Vorrichtung Q, d. i. eine viereckige leichte, hölzerne Rahme, die 10—20mal mit einem feinen, mit Seide übersponnenen Kupferdraht umwunden ist, dessen Enden mit den zwei feinen Spitzen v, w eng verbunden sind. Beim Gebrauche setzt man die Säule B mit dem Drahte F auf aa, und bringt die Spitze v der Rahme Q durch eine eigends dazu im Löffelchen von F angebrachte kleine Oeffnung, die ihr als Pfanne dient, während w in einer anderen am Boden des Bassins c angebrachten, am besten platinenen Pfanne ruht. Durch eine leichte Bewegung des Drahtes F um seinen verticalen Theil stellt man bald die verticale Lage der Drehungsaxe von Q her.

Zur Darstellung des Einflusses des Erdmagnetismus auf einen um seine horizontale Axe beweglichen Polardraht kann man denselben Apparat brauchen, nur muss man ihn auf die Pfannen der zwei Drähte von der Form F legen, gerade so, wie man

beim Versuch mit den zwei beweglichen Polardrähten verfuhr, und dabei dem ganzen Brete A die gehörige Richtung gegen die Weltgegenden geben.

Alle diese Versuche fordern keine stärkere electromotorische Wirkung, als sie eine Zinkplatte von 1 Quadratfus Oberfläche, die zu beiden Seiten mit Kupfer umgeben ist, zu leisten vermag, wenn man eine schwache Säure als leitende Flüssigkeit anwendet.

Um dem Einwurfe vorzubeugen, dass dieser Apparat viel Quecksilber brauche, welches bei dem Versuche, wo es mit Kupfer etc. in Berührung kommt, stets verunreiniget wird, und daher zu einer neuen Anwendung nicht geeignet ist, bemerke ich, dass Quecksilber, welches bei diesem Apparate angewendet wurde, zu jedem ferneren Gebrauche geeignet gemacht werden kann, indem man es in einem starken gläsernen Gefässe mit etwas Schwefelsäure schüttelt, dann in Berührung damit einige Zeit ruhig stehen lässt, hierauf die Säure abgiesst, das Quecksilber mit reinem Wasser wäscht, und wohl abtrocknet.

VI. Fortschritte der Physik in der neueren Zeit.

Akustik.

Die Theorie des Schalles hat die Physiker der neueren Zeit vielfach beschäftiget, und viele Bereicherungen erhalten.

Geschwindigkeit des Schalles in der Luft.

Bekanntlich hat Newton die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft zuerst theoretisch bestimmt, aber eine Formel gefunden, welche ein viel kleineres Resultat gab, als die Versuche. Er glaubte die Ursache dieser Abweichung darin zu finden, dass die Dicke der einzelnen Lufttheilchen nicht in Rechnung gebracht sey und nahm daher an, dass sich diese Dicke zum Intervalle zwischen je zwei zunächst aufeinander folgenden Theilchen wie 1 : 9 verhalte und dadurch der Weg des Schalles um seinen neunten Theil grösser werde, als die Rechnung angab. Die Differenz, welche auch hier noch nicht ganz gehoben war, setzte er auf Rechnung der Dünste, welche nach seiner Hypothese nichts zur Fortpflanzung des Schalles beitragen und doch die Dichtigkeit der Luft vermindern. Indess waren diese nur willkührliche, durch keine Thatsache unterstüzte Annahmen, und konnten daher wenig befriedigen. Da aber doch eine so grosse Abweichung der Erfahrung von der Rechnung erklärt werden sollte, so nahm man an, es wachse die absolute Ausdehnsamkeit der Luft nicht im geraden Verhältnisse mit ihrer Dichte. Insbesondere äussert Lagrange diese Vermuthung, weil wirklich einige Physiker gefunden haben wollten, dass stark comprimirte Luft ihr Volumen durch eine Vermehrung der drückenden Kraft in einem geringeren Verhältnisse ändere, als in dem des Druckes. Andere glaubten darin den Grund der genannten Abweichung zu finden, dass man bei der Deduction der theoretischen Formel nur eine kleine

momentane Erschütterung annimmt, während man doch bei wirklichen Schallversuchen starke Explosionen erregt, in denen der Luft mehrere auf einander folgende Stösse mitgetheilt werden. Den wahren Grund der Sache entdeckte aber Laplace an der durch Compression der Luft während der Bildung einer Schallwelle frei gewordenen Wärme. Biot hat als Beweis für die Richtigkeit dieser Behauptung die Erfahrung angeführt, dass Wasserdünste, durch welche sich der Schall fortpflanzt, ungeachtet der dabei Statt findenden Verdichtung nicht in tropfbaren Zustand übergehen, es fehlte aber noch immer an den nöthigen empirischen Untersuchungen, um den Einfluss der frei gewordenen Wärme in Rechnung bringen, und darnach die Formel für die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft corrigiren zu können, denn man brauchte zu diesem Behufe das Verhältniss zwischen der specifischen Wärme der Luft unter constantem Druck und der unter constantem Volumen zu wissen. Desshalb hat Poisson*) den entgegengesetzten Weg eingeschlagen und untersucht, wieviel Wärme frei werden muss, um zur Ausgleichung der Differenz hinreichend zu seyn, die zwischen der aus der Newton'schen Formel abgeleiteten und der empirisch bestimmten Geschwindigkeit des Schalles in der Luft Statt findet. Endlich bestimmten Laroche und Bérard, später aber noch genauer Gay-Lussac und Welter, die zur directen Auflösung des Problems nöthigen Zahlenwerthe durch Versuche, mit deren Hülfe Laplace und Poisson fand, dass

*) Mémoire sur la theorie du son. Journal polytech. tom. 7.

das Resultat der Newton'schen Formel mit 1,3748 zu multipliciren sey. Eine andere Ursache der Differenz zwischen den Resultaten der Versuche und der Theorie liegt in dem Einfluss des Windes, der die Fortpflanzung des Schalles in der Luft beschleuniget oder verzögert. So lange man daher keine vom Winde unabhängigen Erfahrungen gemacht hatte, war man nicht im Stande, über die Laplace'sche Hypothese zu urtheilen, weil man bei noch obwaltenden Differenzen nicht wissen konnte, wie viel davon auf Rechnung des Windes komme. Bei den Versuchen, die bis zum Jahre 1822 als die genauesten galten, nämlich denen, welche Benzenberg im Jahre 1809 und die französischen Akademiker im J. 1738 anstellten, hat man den Einfluss des Windes nicht beachtet. Desshalb hielt es die Pariser Akademie im Jahre 1822 für nöthig, diese Versuche mit mehr Genauigkeit zu wiederhohlen. Die Herrn Arago, Prony, Mathieu, Bouvard, v. Humboldt und Gay-Lussac *) stellten sie an. Es wurden zu diesem Behufe in jeder der zwei gewählten Stationen sieben Schüsse gethan, so dass immer einer in der ersten Station erregt, in der zweiten beobachtet, der andere in der zweiten erregt und in der ersten beobachtet wurde. Auf diese Weise musste der Wind den Schall, der mit ihm ging, eben so beschleunigen, als er den, welcher gegen ihn ging, verzögerte, und man glaubte das arithmetische Mittel aus den zwei sich so erhebenden Geschwindigkeiten als die Geschwindigkeit des Schalles in ruhiger Luft betrachten zu können.

---

*) Annales de Chimie et de Physique, tom. 21.

Die Richtigkeit dieser Annahme bestreitet aber van Beek *), weil nach einer von van Rees angegebenen Formel statt des arithmetischen das geometrische Mittel der an beiden Stationen beobachteten Zeit genommen werden muss. Allein eines der Mitglieder der Commission, Herr Arago, hatte schon bemerkt, dass selbst, wenn zwei Schüsse gleichzeitig an beiden Stationen erregt werden, das arithmetische Mittel der Fortpflanzungszeiten nicht immer unabhängig vom Winde sey, weil es geschehen kann, dass zwar ein Windstoss in der Richtung des Schalles entsteht, dass ihm aber der Schall vermöge seiner grösseren Geschwindigkeit voreilt, und sich dann wie in ruhiger Luft fortpflanzet, während der nach entgegengesetzter Richtung fortschreitende Schall dem Winde begegnet und von ihm aufgehalten wird. Indess dürfte dieser Fall in einer fast ruhigen Zeit selten eintreffen, und es blieb noch immer zu wünschen, dass man an zwei einander entgegengesetzten Stationen gleichzeitig einen Schall erregte. Dieses geschah durch Dr. Moll, Professor der Physik an der Universität zu Utrecht, und Dr. van Beek **). Zu diesem Zwecke wurden zwei Orte in der Haide der Provinz Utrecht ausgesucht, deren einer vom anderen gesehen werden konnte, und deren Abstand 17669,28 Meter betrug. An jeder dieser Stationen wurde die Richtung des Windes mittelst guter Windfahnen, der Luftdruck und die Temperatur mittelst genau regulirter Barometer und Thermometer und der Feuchtigkeitszustand der Luft mittelst des Da-

*) Bulletin des sciences mathem. phys. et chim. tom. 5. p. 108.

**) Philos. transact. for. 1824. p. II.

niell'schen Hygrometers gemessen. Man feuerte Sechs- und Zwölfpfünder ab, und beobachtete die Zeit mit einem sogenannten Centrifugalpendel. Man bemühte sich, die Kanonen möglichst zu gleicher Zeit in beiden Stationen abzufeuern. Um dieses zu erreichen, hatte man sich in beiden Stationen mit guten Chronometern versehen, deren Uebereinstimmung durch vorläufige Versuche genau ausgemittelt war. An jeder Station hatte ein Officier den Chronometer vor sich auf einem Tische, nahe bei der Kanone, liegen, und ein anderer stand unbeschäftiget mit der Lunte am Zündloche bereit. Im rechten Augenblicke fasste der den Chronometer beobachtende Officier den Arm, welcher den Lunten hielt, und feuerte so in demselben Augenblicke die Kanone los. Ein Mittel aus allen am 27. Juni angestellten Beobachtungen gab für die Zeit, in welcher der Schall vom Einflusse des Windes befreit, die Basis durchlief 51″,96. Es kamen also auf jede Secunde 340,06 Meter. Dabei war die mittlere Temperatur 11°, 16 C., die mittlere Barometerhöhe bei 0° C. = 0,74475 M., die mittlere Spannung der Wasserdämpfe in der Luft = 0.00925307 M., die Schwere nach der mittleren Breite beider Stationen berechnet = 9812,03, woraus man für den Zustand der Atmosphäre zur Zeit der Versuche eine Geschwindigkeit des Schalles von 335,14 M. erhält. Mithin fand zwischen der theoretisch und practisch gefundenen Geschwindigkeit ein Unterschied von 4,92 M. Statt. Am 28. Juni wurden dieselben Versuche wiederhohlt; der Schall brauchte, um die Basis von 17669,28 M. zu durchlaufen, 52″,07 und hatte daher eine mittlere Geschwindigkeit von

339,34 M. Dabei war die mittlere Temperatur 11°,215 C., die mittlere Barometerhöhe bei 0° C. = 0,74815 M., die mittlere Spannung der Wasserdämpfe = 0.0084046, mithin die theoretisch bestimmte Geschwindigkeit 335,10 M., mithin blieb zwischen der theoretisch und practisch bestimmten ein Unterschied von 4,24 M.

Andere Versuche, bei denen auf den Wind besondere Rücksicht genommen wurde, waren die von Gregory zu Wollwich *). Die Basis, welche zu diesen Versuchen diente, hatte eine Länge von 6550 engl. Fuss, die Zeit wurde durch ein von Hardy erfundenes Instrument, das Zehntel einer Secunde mass, angegeben. Die Stärke des Windes nahm man von einem Anemometer ab, oder man suchte seinem Einflusse dadurch auszuweichen, dass der Schall ihn rechtwinkelig durchkreuzen musste. Beim ersten Versuche ging der Wind dem Schall entgegen und hatte eine Geschwindigkeit von 1085 F., im zweiten ging er mit dem Winde und legte in einer Secunde 1133,5 F. zurück; es konnte daher die Geschwindigkeit in ruhiger Luft für 1109,25 F. und die des Windes für 24,25 F. angenommen werden; letzteres Resultat gab auch das Anemometer. Bei den folgenden, auf ähnliche Art angestellten Versuchen fand man die Geschwindigkeit des Schalles 1113 F. und 1116,25 F. Als aber der Wind den Schall rechtwinkelig durchkreuzte, betrug des letzteren Geschwindigkeit 1112 F., wo das Barometer auf 29,68 Z, das Thermometer auf 60° F. stand. Gregory liess auch den Schall über eine Wasserfläche gehen, und mass seine Geschwindigkeit; auch hatte

*) Philos. magaz. tom 63.

bei einem dieser Versuche die Kanone eine horizontale Richtung, bei dem anderen aber eine Neigung von 140° gegen den Horizont. Er fand aber in beiden Fällen dieselbe Geschwindigkeit und zwar 1117 F., nur war im letzteren Falle die Intensität des Schalles bedeutend schwächer, wie sich dieses wohl aus der Theorie voraussagen liess. Ein Echo, das man beim ersten Schuss hörte, veranlasste G. auch die Geschwindigkeit des reflectirten Schalles auszumitteln. Er mass desshalb die Zeit, die verfloss vom Augenblick an, wo man den directen Schall hörte, bis zu dem, wo man das Echo vernahm, fand aber die Geschwindigkeit mit den vorhergehenden Versuchen übereinstimmend.

Andere Versuche, die weniger durch ihre grosse Genauigkeit als durch ihre grosse Anzahl ausgezeichnet sind, wurden von Goldingham *) zu Madras angestellt. Dazu gab der Umstand Veranlassung, dass dem Observatorium gegenüber an zwei Orten Morgens und Abends ein 24 Pfünder gelöset wurde. Die Anzahl der Beobachtungen beläuft sich gegen 800, worunter viele vorkommen, die bei völlig windstillem Wetter angestellt wurden, und daher wohl brauchbar sind. G. berechnet, wiewohl auf eine nicht ganz zu billigende Art, aus mehreren Resultaten das Mittel, und stellt für jeden einzelnen Monat die Geschwindigkeit des Schalles in eine Tabelle zusammen, mit Hinzugabe des Thermometer-, Barometer- und Hygrometerstandes.

Nebst den hier angeführten Versuchen sind noch

*) Philos. transact. of the royal society of Lond. 1823. p. 1.

die von Myrbach und Stampfer *) angestellten merkwürdig, weil sie das Eigenthümliche haben, dass die beiden Standörter (Mönchsstein und Untersberg bei Salzburg), eine sehr verschiedene Höhe, und zwar einen Höhenunterschied von 4198 Par. F. hatten, während die schiefe Entfernung 30601 Par. Fuss betrug. Man fand im Mittel die auf 0° R. reducirte Geschwindigkeit des Schalles gleich 1024,7 Fuss.

Folgende Tafel enthält die Resultate der besten Versuche über die Geschwindigkeit des Schalles:

Name des Beobachters.	Zeit des Versuches.	Ort des Versuches.	Länge der Basis Meter.	Geschwindigkeit des Schalles in Met.
Mersenne . . .	—	Frankreich	— —	448
Florent. Physiker	1660	Italien	1800	361
Walker	1698	England	800	398
Cassini, Huyghens	—	Frankreich	2105	351
Flamsteed u. Halley	—	England	5000	348
Derham	1704 u. 1705	detto	1600—2000	348
Franz. Akademiker	1738	Frankreich	22913 und 28526	332,93 bei 0° C.
Bianconi . . .	1740	Italien	24000	318
La Condamine .	1740	Quito	20543	339
detto	1744	Cayenne	39429	358
T. T. Mayer . .	1778	Deutschland	1040	336,86
G. E. Müller . .	1791	detto	2600	338
Espinosa u. Banza	1794	Chili	16345	356,14 bei 0° C.
Benzenberg . .	1809	Deutschland	9072	333,07 bei 0° C.
Franz. Akademiker	1822	Frankreich	18612	331,05 bei 0° C.
Goldingham . .	1820—1821	Madras	9005,4 und 4243,3	345,7 im Mittel.
Moll, v. Beek und Kuytenbrouwer	1823	Niederlande	17669,28	332,05 bei 0° C. u. trock. Luft.
v. Myrbach u. Stampfer	1822	Oesterreich	990,9	332,7
Gregory . . .	1824	England	199,6	338,6 im Durchschnitte.

*) Jahrbücher des k. k. polytechnischen Institutes in Wien. 7ter B. 1825.

Mittheilung, Polarisation und doppelte Brechung des Schalles.

Wheatstone *) hat zuerst ein Verhalten des Schalles bei seiner Fortpflanzung bemerkt, welches mit dem des polarisirten Lichtes Aehnlichkeit haben soll. Er stellte den Stiel einer tönenden Stimmgabel oder eine gespannte klingende Saite auf das Ende eines metallenen oder gläsernen 5—6 F. langen Stabes, der mit einer tönenden Platte, z. B. dem Kasten eines Fortepiano, in Verbindung stand, und fand, dass sich der Laut der Stimmgabel der Platte mittheilt, als stünden beide in unmittelbarer Berührung mit einander, und auch augenblicklich aufhört, wenn der Stab vom Brete oder von der Stimmgabel auch nur um das mindeste entfernt wird. Jedoch leitet nicht jeder Metallstab jeden Ton gleich gut, sondern es kommt auf seinen Durchmesser an. Ein sehr dünner Draht kann einen hohen Ton noch recht gut fortpflanzen, keineswegs aber einen tiefen. Wurde der Stiel der Stimmgabel senkrecht auf einen langen geraden Metalldraht gestellt, so pflanzte sich der Schall durch ihn am stärksten fort, wenn sich die beiden vibrirenden Zinken der Stimmgabel in der Ebene des Drahtes befanden, während er sich fast gar nicht durch den Draht fortpflanzte, wenn die Ebene der Zinken mit dem Drahte einen rechten Winkel machte. Dreht man die Stimmgabel, während sie tönt, um ihre Axe, so nimmt der Ton während einer ganzen Umdrehung zweimal ab und zweimal zu, und erlangt zweimal sein Maximum

*) Annales of Philosoph. August 1823.

und eben so oft sein Minimum. Stellt man die Stimmgabel so gegen den Draht, dass sich der Schall am besten durch ihn fortpflanzt, und biegt, während sie tönet, den Metalldraht in der Ebene, in welcher die Schwingungen der Stimmgabel vor sich gehen, so nimmt der Laut ab, wird am schwächsten, bis der Draht rechtwinkelig gebogen ist, wächst bei weiter fortgesetztem Biegen neuerdings, und erlangt seine grösste Stärke wieder, wenn beide Hälften des Drahtes wie die Zinken einer gewöhnlichen Gabel mit einander parallel sind.

Um ein Schall-Phänomen hervorzubringen, welches mit der doppelten Brechung des Lichtes einige Aehnlichkeit hat, wählte Wheatstone folgendes Verfahren: Er stellte einen Metallstab vertical, setzte ihn mit dem unteren Ende mit zwei Leitern in Berührung, die horizontal lagen, mit einander einen rechten Winkel einschlossen, und mit tönenden Platten communicirten; er nahm ferner zwei Stimmgabeln, welche verschiedene Töne gaben, setzte sie an dem Schafte mit dem verticalen Metallstab in Berührung, so dass sie eine horizontale Lage hatten, und die Zinken der einen mit dem einen Leiter in einerlei verticaler Ebene sich befanden, die Zinken der anderen hingegen mit dem zweiten Leiter. Es konnten sich daher die Schwingungen jeder Stimmgabel nur dem Leiter mittheilen, der mit ihren Zinken in einerlei Ebene lag. Man muss aber bemerken, dass diese Phänomene denen der Polarisation des Lichtes, mit welchen sie den Namen gemein haben, keineswegs ganz analog sind.

Behält man aber den Ausdruck der Polarisation des Schalles in dem Sinne, wie ihn W. brauchte, so

muss man auch ein von den Brüdern Weber *) entdecktes Phänomen unter die Polarisationserscheinungen zählen. Dieses besteht darin, dass die Schwingungen einer Stimmgabel nach der Richtung, in welcher die Zinken der Gabel schwingen, und auch in der darauf senkrechten stark vernehmbar sind, während man sie in einer dazwischen liegenden Richtung fast gar nicht hört. Bleibt daher ein Beobachter ruhig vor einer vertical gehaltenen tönenden Stimmgabel stehen, und dreht sie um ihre Axe, so nimmt die Stärke des Schalls während einer ganzen Umdrehung zweimal ab und zweimal zu. Dieses Phänomen, das auf den ersten Anblick sehr complicirt zu seyn scheint, hat Chladni **) sehr scharfsinnig und naturgemäss aus der Beschaffenheit der Schwingungen der Stimmgabel erklärt. Wenn sich nämlich ihre Zinken beim Oscilliren einander nähern, so entsteht von Aussen an den beiden Schenkeln eine verdünnte, von Innen hingegen eine verdichtete Luftwelle, entfernen sie sich von einander, so findet das Gegentheil Statt. Daher muss der Schall nicht bloss in der Richtung der Oscillation der Gabel, sondern auch in der darauf senkrechten deutlich gehört werden können. Zwischen diesen zwei Richtungen aber wird es eine geben, wo die verdünnte Welle mit der verdichteten zusammentrifft, so dass eine die andere schwächt oder ganz aufhebt.

Schon Wheatstone ***) hat gefunden, dass sich

*) Die Wellenlehre von E. u. W. Weber. Leipzig. 1825.
**) Kastners Archiv. 1826. 1. St.
***) Am ang. Orte.

der Schall einer tönenden Stimmgabel einem Metalldrahte, mit dem ihr Stiel communicirt, nicht mittheilt, sobald sie auf demselben fortbewegt wird, dass aber die Mittheilung alsogleich erfolgt, wenn man sie auf einer Stelle lässt. Diesem ist eine von den Brüdern Weber *) entdeckte Thatsache analog, vermög welcher die Mittheilung der schwingenden Bewegung einer Stimmgabel an die Luft gänzlich gehindert wird, wenn sich die Stimmgabel schnell um ihre Längenaxe dreht.

Einfluss des Mittels auf die Höhe und Stärke des Schalles.

Man wusste seit langem, dass ein schallender Körper nicht in jedem Mittel dieselbe Anzahl Schwingungen in derselben Zeit macht, und daher nicht in jedem bei einerlei Behandlung denselben Ton gibt, man kannte aber die Gesetze dieses Einflusses gar nicht, bis Savart **) zeigte, dass dieser Einfluss von der Art der Schwingungen, von den Dimensionen des schallenden Körpers und von der Dichte des Mittels abhängt. Sehr lange und dünne Körper, die longitudinal schwingen, geben in jedem Mittel, z. B. in der Luft, in Wasser, in Säuren, in Oehl, selbst in Quecksilber denselben Ton, während der Ton der Körper bei transversalen Schwingungen in verschiedenen Mitteln sehr verschieden ausfällt. Ein dichteres Mittel vertieft solche Töne desto mehr, je breiter und länger ein übrigens sehr dünner Körper ist. Gläserne Röhren oder Platten geben im Wasser einen

*) Wellenlehre §. 274.

**) Annales de Chimie tom. 30. p. 264.

Ton, der um so tiefer ist als in der Luft, je schmäler sie bei derselben Dicke und Länge sind. Solche Körper, deren Seiten gegen die Richtung der Schwingungen mehr oder weniger geneigt sind, wie die meisten Gefässe; müssen in verschiedenen Mitteln die mannigfaltigsten Töne geben. Es lässt sich aber darüber nichts vor der Erfahrung bestimmen, weil die verschiedenen Mittel nicht blos vermöge ihrer Dichte, sondern auch vermöge ihres Mitschwingens auf den Schall Einfluss nehmen. Bei longitudinalen Schwingungen theilen sich die Körper in jedem Mittel auf dieselbe Art ab: nicht so bei Transversalschwingungen. Uebrigens hat ein grösserer oder geringerer Druck des Mittels auf die Schwingungen eines Körpers keinen Einfluss, sobald er nur so weit darein getaucht ist, dass die Oberfläche der Flüssigkeit während des Schwingens eben bleibt, denn man kann ihn, wenn diese Bedingung einmal erreicht ist, zu jeder beliebigen Tiefe ohne Aenderung des Tones eintauchen.

Mit dem Einflusse des Mittels auf die Anzahl der Schwingungen steht auch eine Aenderung der Intensität des Schalles in Verbindung, weil höhere Töne an und für sich schon intentiver sind als tiefere. Auf diesen Umstand muss man achten, wenn es sich um Vergleichung der Stärke des Schalles in verschiedenen Mitteln handelt. Leslie *) hat die Stärke des Schalles im Wasserstoffgas und in einer Mischung aus Wasserstoffgas und atmosphärischer Luft untersucht, und gefunden, dass ein von Wasserstoffgas umgebenes Schlagwerk viel schwächer gehört wird, als in zehnmal ver-

*) Bulletin des sciences math. et phys. et chim. tom 1. p. 233.

dünnter atmosphärischer Luft, und dass ein Gemische aus gleichen Theilen atmosphärischer Luft und Wasserstoffgas den Schall desselben so dämpft, dass man ihn kaum hört. Leslie setzt den ersten Umstand auf Rechnung der geringen Dichte des Wasserstoffgases und seiner Fähigkeit, den Schall sehr schnell fortzupflanzen, wodurch ein Lufttheilchen den Schlägen des schallenden Körpers gar zu leicht ausweicht. Die Schwächung des Schalles hingegen in einem Gemenge aus Hydrogengas und atmosphärischer Luft leitet er davon ab, dass beide Luftarten sich nicht innig mit einander verbinden, und dass daher häufige Reflexionen der Schallstrahlen beim Uebergang von einem Theilchen in ein anderes Statt finden.

Schwingungen gespannter Saiten.

Man nimmt gewöhnlich an, dass das sogenannte ungestrichene C 256 Schwingungen in einer Secunde mache, ohne von der Genauigkeit der Versuche, woraus sich dieses Factum ergibt, genaue Rechenschaft geben zu können. Auch hat die Höhe dieses Tones etwas willkührliches an sich, in so ferne es nämlich jedem frei steht, den Grundton, nach welchem ein musikalisches Instrument gestimmt wird, höher oder tiefer zu nehmen. Allein heut zu Tage wird die Stimmung eines Instrumentes immer nach einer Stimmgabel regulirt, und daher ist diese eigentlich der Repräsentant der ganzen Stimmung. Da diese Stimmgabeln gewöhnlich das einmal gestrichene a ($\bar{a}$) angeben, so braucht man nur die Anzahl der Schwingungen, welche die Stimmgabel in einer Secunde macht, zu kennen, um hieraus die Anzahl der Schwingungen, welche dem ungestrichenen C ent-

spricht, berechnen zu können. Diese Arbeit hat Fischer *) mit einer Genauigkeit unternommen, die nichts mehr zu wünschen übrig lässt.

Er verschaffte sich zu diesem Zwecke 4 Stimmgabeln, wovon eine zur Stimmung des Orchesters des grossen Theaters in Berlin gebraucht wurde, während die zweite die Stimmung der Grand Opéra, die dritte dieselbe am Théâtre Feydeau, die vierte die am Théâtre italien zu Paris genau angab. Hierauf spannte er eine Saite auf ein eigens eingerichtetes (Seite 184 dieses Bandes beschriebenes) Monochord, damit sie mit einer dieser Stimmgabeln in vollkommenem Unisono war, bestimmte alle Elemente, die zur Berechnung der Anzahl der Schwingungen nöthig waren, mit einer musterhaften Genauigkeit, und fand so aus sehr vielen Versuchen die Anzahl der einfachen Schwingungen (worunter Fischer einen einzelnen Hin- und Hergang versteht) jeder Stimmgabel oder der mit ihr im Unisono befindlichen Saite, wie folgt:

Die Stimmgabel vom Theater in Berlin machte in 1 Sec. 437 Schwing.
- - - von der Grand Opéra in Paris 431 - -
- - - vom Théâtre Feydeau 408 - -
- - - vom Théâtre Italien 424 - -

Um aber zu erfahren, ob die materielle Beschaffenheit der Saiten keinen Einfluss auf die Anzahl der Schwingungen hat, die einem Tone von bestimmter Höhe entspricht, machte Fischer mehrere Versu-

*) Abhandl. der Akad. der Wissenschaften zu Berlin. 1825. S. 187.

che mit messingenen, eisernen und Darm-Saiten, fand aber in der Anzahl ihrer Schwingungen bei einerlei Ton keinen Unterschied.

Molecularbewegung schallender Körper.

Bekanntlich hat Chladni zuerst an schallenden Körpern die schwingenden Stellen von den ruhenden mittelst aufgestreuten Sandes unterscheiden gelehrt. Oersted hat an Stellen, an welchen der Sand keine Schwingungsknoten mehr nachweiset, mittelst Hexenmehl (semen lycopodii) oder gepulvertes Blei solche sichtbar gemacht. Wheatstone *) bediente sich in derselben Absicht einer dünnen Wasserschichte, mit welcher er den schallenden Körper bedeckte, und fand dadurch mehrere interessante Resultate in Betreff der Bewegung der kleinsten Theile schallender Körper.

Die Oberfläche einer so mit Wasser bedeckten Glasplatte zeigt sich beim Schwingen wie mit einem Wassernetz bedeckt, das desto feiner ist, je höher der Ton wird, welchen die Platte gibt. Giesst man in ein cylindrisches gläsernes Gefäss drei Flüssigkeiten, die sich über einander lagern, z. B. Quecksilber, Wasser und Oehl, und versetzt es in Schwingungen, so bilden sich an der Oberfläche jeder dieser Flüssigkeiten ähnliche Figuren, wie auf einer mit Wasser bedeckten Glasplatte. Taucht man dieses Glas in ein noch weiteres Gefäss mit Wasser, so bemerkt man an der äusseren Fläche desselben Schwingungen, wie an der inneren. Bestimmt man mittelst eines Micrometers an einer schallenden, mit Wasser

*) Annales de Chimie. tom 23. p. 313.

bedeckten Glasplatte die Anzahl der für sich schwingenden Theile innerhalb einer bestimmten Ausdehnung, so findet man an dem Platze, wo vorhin vier solche Theile waren, nur einen, sobald man nur die Hälfte der Platte in Schwingungen versetzt, so dass sich in dieser ganzen Hälfte gerade noch einmal so viele schwingende Theile befinden, wie vorher auf der ganzen Platte. Wheatstone hat auch die Mollecularbewegung, welche durch Längenschwingungen einer Luftsäule hervorgebracht wird, dadurch sichtbar gemacht, dass er das Instrument, worin die Luft schwingt, mit dem offenen Ende in Wasser tauchte.

Gestalt der Klangfiguren auf ebenen Scheiben.

Unter den Klangfiguren, welche Chladni mit eben so viel Reinheit als Sicherheit an ebenen Scheiben hervorzubringen wusste, befanden sich mehrere, die aus geraden, sich durchschneidenden Linien bestanden. Strehlke *) meint aber, dass man, wenn alles recht genau bei den Versuchen zugeht, wenn man dazu Metallscheiben nimmt, sie mit reinem Quarzsand oder mit schwerem magnetischen Eisensand bestreut, und sie recht wohl an einer Stelle befestiget, stets Klangfiguren erhält, die aus krummen Linien im Sinne der Geometrie bestehen, welche sich nicht durchkreuzen. Alle diese Sätze bestreitet aber Chladni **) und behauptet, dass der Irrthum

*) Poggendorfs Annalen der Physik und Chemie. 1825. B. 4. S. 205.

**) Ebendaselbst. 1825. B. 5. S. 345.

Strehlke's hauptsächlich darin liege, dass er sich mettallener Platten bediente, die niemals so homogen sind, wie gläserne. Bei hinreichend homogenen und regelmässigen Scheiben sind nach ihm manchmal alle, manchmal einige Knotenlinien gerade und sowohl die geraden als die krummen können sich durchschneiden.

(Wird fortgesetzt.)

MATHEMATISCHE ABTHEILUNG.

I. Auflösung einiger Aufgaben aus dem Gebiete der Wahrscheinlichkeits-Rechnung.

Aus Poisson's Mémoire sur l'avantage du banquier au jeu de trente et quarante. (Annales des Mathématiques pures et appliquées par Gergonne Tome 16. (1825 — 1826) pag. 173 etc.)

1.

Die Aufgaben, von welchen hier die Rede seyn wird, boten sich Poisson dar, als er den Vortheil des Banquiers bei dem unter den Benennungen rouge et noir, trente et un, trente et quarante bekannten Hazardspiele der Rechnung zu unterwerfen suchte, ein Problem, welches weder unter den bereits behandelten enthalten ist, noch die Anwendung der gewöhnlichen Methoden gestattet, sondern neuer Hülfsmittel bedarf. Bei dem genannten Spiele werden aus einem durch Vereinigung von sechs vollständigen Kartenspielen gebildeten, also aus $52 \times 6 = 312$ Blättern bestehenden Paquete, worin jede Figur zehn, jedes andere Blatt aber so viel Einheiten zählt, als seine Marken angeben, nach einander so viele Blätter herausgehoben, bis die Summe ihrer Einheiten 30 übersteigt, wodurch der erste Zug vollendet ist; auf diesen folgt aus den übrigen Karten durch dasselbe Verfahren ein zweiter, und dieser endigt die erste Parthie. Nun wird mit den noch übrigen Karten eine

neue, ebenfalls aus zwei solchen Zügen bestehende Parthie eröffnet, und auf die nämliche Weise fortgespielt, bis entweder das Paquet erschöpft ist, oder wenigstens die noch vorhandenen Blätter zu keiner vollständigen Parthie mehr hinreichen, worauf das Spiel mit demselben oder mit einem neuen Paquete wieder beginnen kann. In jeder einzelnen Parthie gewinnt derjenige Zug, dessen Marken zusammen sich am wenigsten über die Zahl 30 erheben; die Spieler wetten gegen den Banquier um den Betrag ihres beliebigen Einsatzes nach ihrem Gutdünken für das Gewinnen des einen oder des anderen Zuges. Eine Parthie deren beide Züge sich um gleichviel von 30 entfernen, wird als nicht gespielt betrachtet, ausgenommen, wenn die Summe beider 31 beträgt (refait de 31): in diesem Falle hat der Banquier das Recht die Hälfte jedes Einsatzes einzuziehen. Hierin besteht der einzige Vortheil des Banquiers bei diesem Spiele, welches in allen anderen Beziehungen zwischen ihm und seinen Gegnern auf gleiche Weise schwebt. Der Werth oder das Moment dieses Vortheiles in Bezug auf eine bestimmte Parthie wird gefunden, wenn man die halbe Summe sämmtlicher Einsätze mit dem Masse der Wahrscheinlichkeit multiplicirt, dass gerade bei dieser Parthie beide Züge die Zahl 31 geben werden. Auf die Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit kommt es also bei der vorliegenden Frage allein an, und dazu führen die Auflösungen der nachstehenden Aufgaben.

2.

Erste Aufgabe.

Ein Gefäss enthält x_1 Kugeln, welche mit Nr. 1 bezeichnet sind; x_2 Kugeln, welche Nr. 2; x_3 Kugeln, welche Nr. 3 u. s. w.; endlich x_i Kugeln, welche Nr. i führen. Man hebt eine Kugel nach der andern aus dem Gefässe heraus, ohne dieselben wieder hineinzulegen, bis die Summe der Nummern sämmtlicher gezogenen Kugeln die Zahl x erreicht oder überstiegen hat. Man frägt nach der Wahrscheinlichkeit diese Summe genau = x zu erhalten.

Es sey s die Anzahl aller in dem Gefässe befindlichen Kugeln, also

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_i = s;$$

ferner seyen $a_1, a_2, a_3, \ldots a_i$ ganze Zahlen, die Nulle mit zugelassen, welche beziehungsweise die Zahlen $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_i$ nicht überschreiten, endlich werde

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_i = n$$

gesetzt.

Da die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses durch den Quotienten gemessen wird, welchen man erhält, wenn man die Anzahl aller diesem Ereignisse günstigen Fälle durch die Anzahl aller möglichen Fälle dividirt, vorausgesetzt, dass die genannten Fälle sämmtlich gleichmöglich sind; so ist die Wahrscheinlichkeit aus den vorhandenen s Kugeln eine mit Nr. 1 bezeichnete herauszuheben $= \frac{x_1}{s}$; ferner die Wahrscheinlichkeit, aus den noch übrigen $s - 1$ Kugeln eine mit derselben Nummer versehene zu er-

halten $= \frac{x_1 - 1}{s - 1}$; eben so die Wahrscheinlichkeit unter den noch übrigen Kugeln eine von der erwähnten Beschaffenheit zu ergreifen $= \frac{x_1 - 2}{s - 2}$ u. s. w.

Aber die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens mehrerer von einander unabhängiger Ereignisse wird durch das Product der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse ausgedrückt; daher ist die Wahrscheinlichkeit aus den vorhandenen s Kugeln in a_1 aufeinander folgenden Zügen, ohne Zurückstellung einer Kugel, ununterbrochen fort, Nr. 1 zu erhalten

$$= \frac{x_1 (x_1 - 1)(x_1 - 2) \ldots (x_1 - a_1 + 1)}{s (s - 1)(s - 2) \ldots\ldots (s - a + 1)}$$

Auf dieselbe Art findet man die Wahrscheinlichkeit aus den noch rückständigen $s - a_1$ Kugeln in a_2 Zügen ununterbrochen fort Kugeln mit Nr. 2 herauszuheben

$$= \frac{x_2 (x_2 - 1)(x_2 - 2) \ldots\ldots (x_2 - a_2 + 1)}{(s - a_1)(s - a_1 - 1)(s - a_1 - 2) \ldots (s - a_1 - a_2 + 1)}$$

u. s. w.; endlich die Wahrscheinlichkeit, bei der i^{ten} Ziehung aus den noch übrigen $s - n + a_i$ Kugeln in a_i Zügen stets Nr. 1 zu bekommen

$$= \frac{x_i (x_i - 1)(x_i - 2) \ldots (x_i - a_i + 1)}{(s - n + a_i)(s - n + a_i - 1) \ldots (s - n + 1)}$$

Multiplicirt man diese Brüche, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit in n Zügen ohne Zurückstellung einer Kugel aus den vorhandenen s Kugeln zuerst a_1 Kugeln mit Nr. 1, sodann a_2 Kugeln mit Nr. 2, hernach a_3 Kugeln mit Nr. 3 etc., endlich a_i Kugeln mit Nr. i erscheinen zu sehen.

Nimmt man aber auf die Ordnung des Aufeinanderfolgens der Kugeln keine Rücksicht, wenn nur nach n Zügen a_1 Kugeln mit Nr. 1, a_2 Kugeln mit Nr. 2, a_3 Kugeln mit Nr. 3 etc., und a_i Kugeln mit Nr. i sich vorfinden, so muss man, um die Wahrscheinlichkeit dieses Erfolges zu bestimmen, das Product der erwähnten Brüche noch mit der Anzahl der Versetzungen, welche die n Nummern mit Berücksichtigung des Umstandes zulassen, dass darunter a_1 gleiche, a_2 andere gleiche u. s. w. vorkommen, nämlich mit der Zahl

$$\frac{1 . 2 . 3 \ldots\ldots\ldots n}{1 . 2 . 3 \ldots a_1 . 1 . 2 . 3 \ldots a_2 \text{ etc. } . 1 . 2 . 3 \ldots a_i}$$

multipliciren. Bezeichnet man der Kürze wegen allgemein den $(q+1)$ten Coefficienten in der Entwickelung der p^{ten} Potenz eines Binoms nach Newtons Formel durch das Symbol $\binom{p}{q}$, so erhält man für die letztere Wahrscheinlichkeit den Ausdruck

$$\frac{\binom{x_1}{a_1}\binom{x_2}{a_2}\binom{x_3}{a_3}\cdots\binom{x_i}{a_i}}{\binom{s}{n}}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich durch ein innerhalb bestimmter Grenzen genommenes Integral (intégrale définie) darstellen. Es ist nämlich, wie man leicht findet, wenn man das Product $y^n(1-y)^{p+1}$ differenzirt, und darauf wieder integrirt

$$\int (1-y)^p\, y^n\, dy = -\frac{y^n(1-y)^{p+1}}{p+1} + \frac{n\int (1-y)^{p+1}\, y^{n-1}\, dy}{p+1};$$

also, wenn man die Integrale für $y = o$ verschwinden lässt, und sie bis $y = 1$ ausdehnt,

$$\int (1-y)^p\, y^n\, dy = \frac{n}{p+1} \int (1-y)^{p+1}\, y^{n-1}\, dy\,.$$

Setzt man hier nach und nach $n-1$, $n-2$, $n-3$, ... 3, 2, 1 statt n; ferner $p+1$, $p+2$, $p+3$ ... $p+n-1$ statt p, und substituirt man jeden folgenden Ausdruck in den vorhergehenden, so ergibt sich innerhalb der erwähnten Grenzen

$$\int (1-y)^p y^n dy = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 3.2.1}{(p+1)(p+2)(p+3)\ldots(p+n)} \times \\ \times \int (1-y)^{p+n} dy$$

Aber innerhalb derselben Grenzen ist

$$\int (1-y)^{p+n} dy = \frac{1}{p+n+1}$$

folglich hat man, wenn man $\binom{p+n}{n}$ statt

$$\frac{(p+n)\ldots(p+2)(p+1)}{1,\ldots(n-1)\,n}$$ schreibt,

$$\binom{p+n}{n}^{-1} = (p+n+1) \int (1-y)^p y^n dy$$

Es sey nun $p+n = s$, oder $p = s-n$, so finden wir

$$\binom{s}{n}^{-1} = (s+1) \int (1-y)^{s-n} y^n dy$$

folglich wenn wir der Kürze wegen

$$\binom{x_1}{a_1} \frac{y^{a_1}}{(1-y)^{a_1}} \cdot \binom{x_2}{a_2} \frac{y^{a_2}}{(1-y)^{a_2}} \cdot \binom{x_3}{a_3} \frac{y^{a_3}}{(1-y)^{a_3}} \ldots \\ \ldots \binom{x_i}{a_i} \frac{y^{a_i}}{(1-y)^{a_i}} = Y$$

seyn lassen, und bedenken, dass die Summe der Exponenten a_1, a_2, a_3 ... a_i gleich n ist,

$$\binom{x_1}{a_1}\binom{x_2}{a_2}\binom{x_3}{a_3}\ldots\binom{x_i}{a_i}\cdot\binom{s}{n}^{-1}$$
$$= (s+1)\int(1-y)^s\, Y\,dy$$

Die Summe der bei den oben erwähnten n Zügen erscheinenden Nummern ist $= a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + ia_i$; aber diese Summe soll, wie es die Aufgabe verlangt $= x$ seyn: daher ist (nach dem Satze, dass die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens eines unter mehreren Fällen durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten dieser Fälle gemessen wird), die geforderte Wahrscheinlichkeit der Summe aller Resultate gleich, welche der Ausdruck $(s+1)\int(1-y)^s\, Y\,dy$ darbietet, wenn man den Zahlen $a_1, a_2, a_3 \ldots a_i$ alle der Gleichung $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + ia_i = x$ Genüge leistenden Werthe beilegt. Stellen wir nun die Summe aller Werthe, welche Y für die erwähnten Werthe von $a_1, a_2, a_3 \ldots a_i$ annimmt durch Y_1, und die zu suchende Wahrscheinlichkeit durch X vor, so ist

$$X = (s+1)\int(1-y)^s\, Y_1\,dy$$

Entwickelt man die Potenzen

$$\left(1+\frac{yt}{1-y}\right)^{x_1},\ \left(1+\frac{yt^2}{1-y}\right)^{x_2},\ \text{etc.}\ \left(1+\frac{yt^i}{1-y}\right)^{x_i}$$

worin t eine unbestimmte Grösse anzeigt, nach dem binomischen Lehrsatze, und multiplicirt man die erhaltenen Reihen, so erscheint in dem nach den steigenden Potenzen von t geordneten Producte, t^x mit dem Coefficienten Y_1. Da nun $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_i = s$ ist, so kann man auch Y_1 als den Coefficienten von t^x in der Entwickelung des Productes

$$(1-y)^{-s}\,(1-y+yt)^{x_1}\,(1-y+yt^2)^{x_2}\ldots(1-y+yt^i)^{x_i}$$

bezeichnen, und somit wird die geforderte Wahrscheinlichkeit X durch den Coefficienten von t^x in der Entwickelung des von $y=0$ bis $y=1$ genommenen Integrals

$$(s+1)\int(1-y+yt)^{x_1}\,(1-y+yt^2)^{x_2}\ldots(1-y+yt^i)^{x_i}dy$$

ausgedrückt.

3.

Die so eben betrachtete Aufgabe lässt sich auch mit Hülfe einer Differenzen-Gleichung auflösen. Die zu suchende Wahrscheinlichkeit ist nämlich eine Function der Zahl x und der Zahlen $x_1, x_2, z_3, \ldots x_i$. Sie werde durch das Zeichen

$$f(x, x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_i)$$

vorgestellt. Nimmt man an, es sey bereits der erste Zug gemacht worden, so geht die fragliche Wahrscheinlichkeit nunmehr

entweder in $f(x-1, x_1-1, x_2, x_3 \ldots x_i)$
oder in $f(x-2, x_1, x_2-1, x_3 \ldots x_i)$
oder in $f(x-3, x_1, x_2, x_3-1, \ldots x_i)$
.. ..
oder endlich in $f(x-i, x_1, x_2, x_3, \ldots x_i-1)$

über, je nachdem die gezogene Kugel entweder die Nummer 1, oder 2, oder 3, ... oder endlich i an sich trägt. Die Wahrscheinlichkeiten der letztgenannten Ereignisse sind beziehungsweise $\frac{x_1}{s}, \frac{x_2}{s}, \frac{x_3}{s} \ldots \frac{x_i}{s}$; daher drücken die Producte

$$\frac{x_1}{s} f(x-1, x_1-1, x_2, x_3, \ldots x_i)$$

$$\frac{x_2}{s} f(x-2, x_1, x_2-1, x_3, \ldots x_i)$$

$$\frac{x_3}{s} f(x-3, x_1, x_2, x_3-1, \ldots x_i)$$

.. ..

$$\frac{x}{s} f(x-i, x_1, x_2, x_3, \ldots x_i-1)$$

die Wahrscheinlichkeiten aus, die vorgeschriebene Summe x unter der besonderen Bedingung zu erreichen, dass der Anfangszug gerade Nr. 1, oder Nr. 2, oder Nr. 3, u. s. w., oder endlich Nr. i darstellt. Aber einer dieser Fälle wird gewiss immer Statt finden; daher ist die zu suchende Wahrscheinlichkeit die Summe dieser einzelnen Wahrscheinlichkeiten.

Auf diesem Wege, welchen man bei der Behandlung der meisten Probleme der Wahrscheinlichkeits-Rechnung einzuschlagen pflegt, gelangt man zu der Gleichung

$$(1)\quad f(x, x_1, x_2, x_3, \ldots x_i) = \frac{x_1}{s} f(x-1, x_1-1, x_2, x_3 \ldots x_i)$$
$$+ \frac{x_2}{s} f(x-2, x_1, x_2-1, x_3 \ldots x_i)$$
$$+ \frac{x_3}{s} f(x-3, x_1, x_2, x_3-1 \ldots x_i)$$
$$+ \text{etc.}$$
$$+ \frac{x_i}{s} f(x-i, x_1, x_2, x_3 \ldots x_i-1)$$

Wiederholt man die obigen Schlüsse unter der Voraussetzung, dass $x = a$ und $a < i$ ist, so findet man

$$f(a, x_1, x_2, x_3 \ldots x_i) = \frac{x_1}{s} f(a-1, x_1-1, x_2, x_3 \ldots x_i)$$
$$+ \frac{x_2}{s} f(a-2, x_1, x_2-1, x_3 \ldots x_i)$$
$$+ \frac{x_3}{s} f(a-3, x_1, x_2, x_3-1 \ldots x_i)$$
$$+ \text{etc.}$$
$$+ \frac{x_{a-1}}{s} f(1, x_1, x_2, .. x_{a-1}-1, .. x_i)$$
$$+ \frac{x_a}{s}.$$

Soll diese Gleichung aus der obigen für $x = a$ wirklich hervorgehen, so muss offenbar $f(x, x_1, x_2, x_3 \ldots . x_i)$ der Einheit gleich gesetzt werden, wenn die Nulle an die Stelle von x kömmt, und verschwinden, wenn x negativ und ohne Rücksicht auf das Vorzeichen kleiner als i wird, welche Werthe die andern veränderlichen Grössen $x_1, x_2, x_3 \ldots . x_i$ auch immer erhalten mögen. Lässt man nun in der Gleichung (1) nach und nach $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, ... seyn, so ergibt sich

$$f(1, x_1, x_2, \ldots x_i) = \frac{x_1}{s}$$

$$f(2, x_1, x_2, \ldots x_i) = \frac{x_1}{s} f(1, x_1-1, x_2 \ldots x_i) + \frac{x_2}{s}$$

$$f(3, x_1, x_2, \ldots x_i) = \frac{x_1}{s} f(2, x_1-1, x_2 \ldots x_i) + \frac{x_2}{s} f(1, x_1, x_2-1 \ldots x_i) + \frac{x_3}{s} \text{u.s.w.}$$

Setzt man in der ersten dieser Gleichungen nach und nach x_1-1, x_2-1, x_3-1 etc. statt x_1, x_2, x_3 etc., wobei natürlich auch $s-1$ an die Stelle von s tritt, so kann man mittelst derselben die Grössen $f(1. x_1-1, x_2 \ldots x_i)$, $f(1, x_1. x_2-1, \ldots x_i)$ u. s. w. aus den übrigen Gleichungen wegschaffen, und man hat

$$f(2, x_1, x_2, \ldots x_i) = \frac{x_1}{s} \cdot \frac{x_1-1}{s-1} + \frac{x_2}{s}$$

$$f(3, x_1, x_2, \ldots x_i) = \frac{x_1}{s} f(2, x_1-1, x_2, \ldots x_i) + \frac{x_2}{s} \cdot \frac{x_1}{s-1} + \frac{x_3}{s} \text{ u. s. w.}$$

Aus diesen zwei Gleichungen folgt eben so

$$f(3, x_1, x_2 \ldots x_i) = \frac{x_1}{s} \cdot \frac{x_1-1}{s-1} \cdot \frac{x_1-2}{s-2} + 2 \frac{x_2}{s} \cdot \frac{x_1}{s-1} + \frac{x_3}{s} \text{ u. s. f.}$$

Auf diese Weise lässt sich die fragliche Wahrscheinlichkeit für kleine Werthe von x leicht ausmitteln; allein die Rechnung wird ihrer Weitläufigkeit wegen unanwendbar, sobald der Werth von x einigermassen beträchtlich ist, und man muss sich in solchen Fällen an das Integral der obigen Differenzen-Gleichung (1) wenden. Diese Gleichung erhält nach verrichteter Multiplication beider Theile mit s veränderliche Coefficienten vom ersten Grade und könnte daher mit Hülfe bestimmter Integrale integrirt werden. Jedoch würde uns diese Methode nur sehr schwer zum Ziele führen: es mag daher hinreichen zu zeigen, dass die in 2. gefundene Auflösung der Gleichung (1) wirklich Genüge leistet.

4.

Der erwähnten Auflösung gemäss ist $f(x, x_1, x_2, \ldots x_i)$ der Coefficient der Potenz t^x in in der Entwickelung des von $y = 0$ bis $y = 1$ genommenen Integrals

$$(s+1) \int (1-y+yt)^{x_1} (1-y+yt^2)^{x_2} \ldots (1-y+yt^i)^{x_i} dy$$

Setzen wir dieses Integral $= F(x_1, x_2, x_3, \ldots x_i)$ so haben wir

$$(2) \quad \Sigma t^x f(x, x_1, x^2, x_3 \ldots x_i) = F(x_1, x_2, x_3, \ldots x_i)$$

wobei Σ eine Summe anzeigt, welche sich auf alle ganzen positiven Werthe des x, die Nulle mit einbegriffen, also von $x = 0$ bis $x = \infty$ erstreckt.

Die hier anzustellende Probe ist vollzogen, wenn wir die Eigenschaften der Function $F(x_1, x_2, x_3, \ldots x_i)$ unter der Voraussetzung, dass die Gleichung (2) bestehe erforschen, und dann nachweisen, dass diesel-

ben Eigenschaften auch dem oben aufgestellten Integral zukommen.

Die Function $f(x, x_1, x_2 \ldots x_i)$ verschwindet für negative Werthe von x; es ist daher, wenn k eine ganze positive Zahl bedeutet,

$\Sigma\, t^x f(x-k, x_1, x_2, x_3 \ldots x_i) = t^k F(x_1, x_2, x_3 \ldots x_i)$;

ferner geht $f(x, x_1, x_2 \ldots x_i)$ für $x = 0$ in die Einheit über, daher beginnt die Function $F(x_1, x_2, x_3 \ldots x_i)$ mit dem Gliede 1. Multiplicirt man also die Gleichung (1) mit t^x und nimmt man beiderseits die Summen von $x = 1$ bis $x = \infty$, so erhält man

$$(3)\ F(x_1, x_2, x_3, \ldots x_i) - 1$$
$$= \frac{t x_1}{s} F(x_1 - 1, x_2, x_3, \ldots x_i)$$
$$+ \frac{t^2 x_2}{s} F(x_1, x_2 - 1, x_3, \ldots x_i)$$
$$+ \text{etc.}$$
$$+ \frac{t^i x_i}{s} F(x_1, x_2, x_3 \ldots x_i - 1)$$

welcher Gleichung das oben erwähnte Integral wirklich Genüge leistet. Denn setzt man in demselben

$$\frac{y}{1-y} = u, \text{ also } y = \frac{u}{1+u} \text{ und } dy = \frac{du}{(1+u^2)};$$

wie auch der Kürze wegen

$$(1+ut)^{x_1} . (1+ut^2)^{x_2} . (1+ut_3)^{x_3} \ldots (1+ut^i)^{x_i} = U$$

so verwandelt sich dieses Integral in

$$(s+1) \int \frac{U du}{(1+u)^{s+2}} = F(x_1, x_2, x_3, \ldots x_i)$$

wobei aber die Integration sich auf die Grenzen $u = 0$ und $u = \infty$ bezieht. Setzt man ferner in eben diesem Integral nach und nach $x_1 - 1$ statt x_1,

x_2-1 statt x_2 u. s. w. x_i-1 statt x_i und jedesmal $s-1$ statt s, so hat man

$$F(x_1-1, x_2, \ldots x_i) = s\int(1-y+yt)^{x_1-1}(1-y+yt^2)^{x_2}\ldots$$
$$\ldots(1-y+yt^i)^{x_i}dy$$

$$F(x_1, x_2-1, \ldots x_i) = s\int(1-y+yt)^{x_1}(1-y+yt^2)^{x_2-1}\ldots$$
$$\ldots(1-y+yt_i)^{x_i}dy$$

. . . .

$$F(x_1, x_2, \ldots x_i-1) = s\int(1-y+yt)^{x_1}(1-y+yt^2)^{x_2}\ldots$$
$$\ldots(1-y+yt^i)^{x_i-1}dy$$

Differenzirt man aber U in Bezug auf u, so findet man

$$\frac{dU}{du} = tx_1(1+ut)^{x_1-1}(1+ut^2)^{x_2}\ldots(1+ut^i)^{x_i}$$
$$+ t^2x_2(1+ut)^{x_1}(1+ut^2)^{x_2-1}\ldots(1+ut^i)^{x_i}$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ t^ix_i(1+ut)^{x_1}(1+ut^2)^{x_2}\ldots(1+ut^i)^{x_i-1}$$

und, wenn man diese Gleichung mit den obigen vergleicht

$$s\int\frac{dU}{(1+u)^{s+1}} = tx_1F(x_1-1, x_2, \ldots x_i)$$
$$+ t^2x_2F(x_1, x_2-1, \ldots x_i) + \text{etc.}$$
$$\ldots\ldots + t^ix_iF(x_1, x_2, \ldots x_i-1)$$

Durch diese Resultate geht die Gleichung (3) in

$$(4) \qquad (s+1)\int\frac{Udu}{(1+u)^{s+2}} - 1 = \int\frac{dU}{(1+u)^{s+1}}$$

über. Aber es ist überhaupt

$$\int\frac{dU}{(1+u)^{s+1}} = \frac{U}{(1+u)^{s+1}} + (s+1)\int\frac{Udu}{(1+u)^{s+2}}$$

also insbesondere, wenn die Integrale für $u = 0$

verschwinden und bis $n = \infty$ ausgedehnt werden sollen, weil U bei dem ersten Grenzwerthe = 1 und bei dem zweiten = 0 wird:

$$\int \frac{dU}{(1+u)^{s+1}} = -1 + (s+1)\int \frac{Udu}{(1+u)^{s+2}}$$

Est ist demnach die Gleichung (4) eine identische, und hierdurch die Uebereinstimmung des Resultates in 2 mit der in 3 gefundenen Gleichung bewährt.

5.

Zweite Aufgabe.

Ein Gefäss enthält x_1 Kugeln mit Nr. 1, x_2 Kugeln mit Nr. 2, x_3 Kugeln mit Nr. 3 u. s. w. x_i Kugeln mit Nr. i bezeichnet. Unter der Voraussetzung keine gezogene Kugel wieder zurückzustellen, hebt man aus demselben in einer ersten Reihe von Zügen nach und nach Kugeln heraus, bis die Summe der darauf befindlichen Nummern die Zahl x erreicht oder überstiegen hat; eben so nimmt man in einer zweiten Reihe von Zügen von den rückständigen Kugeln so viele weg, als nöthig sind, um die Summe x′ oder eine grössere darzustellen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit bei der ersten Operation genau die Summe x und zugleich bei der zweiten genau x′ erscheinen zu sehen?

Wie bereits während der Auflösung der vorhergehenden Aufgabe gefunden wurde, ist die Wahrkeit, dass in der ersten Reihe von Zügen a_1 Kugeln mit Nr. 1, a_2 Kugeln mit Nr. 2, a_3 Kugeln mit Nr. 3 u. s. w., endlich a_i Kugeln mit Nr. i in was immer für einer Ordnung ergriffen werden

$$= \binom{s}{n}^{-1} \binom{x_1}{a_1} \binom{x_2}{a_2} \binom{x_3}{a_3} \ldots \binom{x_i}{a_i}$$

wobei $s = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_i$
und $n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_i$ gesetzt wurde.

Aus demselben Grunde ist die Wahrscheinlichkeit aus den noch übrigen $s - n$ Kugeln in was immer für einer Ordnung b_1 Kugeln mit Nr. 1, b_2 Kugeln mit Nr. 2, b_3 Kugeln mit Nr. 3, u. s. w. endlich b_i Kugeln mit Nr. i herauszuheben

$$= \binom{s-n}{n'}^{-1} \binom{x_1 - a_1}{b_1} \binom{x_2 - a_2}{b_2} \binom{x_3 - a_3}{b_3} \ldots \binom{x_i - a_i}{b_i}$$

wobei n' die Summe $b_1 + b_2 +$ etc. bedeutet.

Demnach ist die Wahrscheinlichkeit der Aufeinanderfolge beider Ereignisse, wenn man das Product zweier Binomial-Coefficienten von den Formen

$\binom{x_1}{a_1}$ und $\binom{x_1 - a_1}{b_1}$ durch $\binom{x_1}{a_1, b_1}$ vorstellt,

$$= \binom{s}{n, n'}^{-1} \binom{x_1}{a_1, b_1} \binom{x_2}{a_2, b_2} \binom{x_3}{a_3, b_3} \ldots \binom{x_i}{a_i, b_i}$$

Man kann aber das Product

$$\binom{s}{n, n'} = \frac{s(s-1)(s-2)\ldots(s-n+1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots\ldots n} \cdot \frac{(s-n)\ldots(s-n-n'+1)}{1.\ 2.\ldots n'}$$

auch auf die Form

$$\frac{s(s-1)\ldots(s-n-n'+1)}{1.\ 2.\ldots\ldots (n+n')} \cdot \frac{(n+n')(n+n'-1)\ldots(n'+1)}{1.\ 2.\ldots\ldots n'}$$

bringen, d. h. es ist in unseren Zeichen

$$\binom{s}{n, n'} = \binom{s}{n+n'} \binom{n+n'}{n};$$

ferner ist, der früher gebrauchten Formel gemäss:

$$\binom{s}{n+n'}^{-1} = (s+1) \int (1-y)^{s-n-n'} y^{n+n'} dy$$

und $\binom{n+n'}{n}^{-1} = (n+n'+1) \int (1-z)^{n'} z^{n} dz$

wenn man in der ersten Gleichung von $y = 0$ bis $y = 1$, und in der zweiten von $z = 0$ bis $z = 1$ in-

tegrirt; auch ist, wenn man nach verrichteter Differenziation $\alpha = 1$ setzt

$$n + n' + 1 = \frac{d \,.\, \alpha^{n + n' + 1}}{d\alpha}$$

also $\left(\begin{matrix} n + n' \\ n \end{matrix}\right)^{-1} = \frac{d.}{d\alpha} \int (1 - z)^{n'} z^n \alpha^{n + n' + 1} dz$:

daher hat man wenn man

$$X_1\, X_2\, X_3 \ldots \ldots X_i = P$$

und im Allgemeinen, in so ferne der Zeiger m zwischen 1 und i fällt,

$$X_m = \left(\begin{matrix} x_m \\ a_m,\ b_m \end{matrix}\right) \frac{y^{a_m + b_m} (1 - z)^{b_m} z^{a_m} \alpha^{a_m + b_m}}{(1 - y)^{a_m + b_m}}$$

seyn läst, die letztgenannte Wahrscheinlichkeit

$$\left(\begin{matrix} s \\ n,\ n' \end{matrix}\right)^{-1} \left(\begin{matrix} x_1 \\ a_1,\ b_1 \end{matrix}\right) \left(\begin{matrix} x_2 \\ a_2,\ b_2 \end{matrix}\right) \cdots \left(\begin{matrix} x_i \\ a_i,\ b_i \end{matrix}\right)$$

$$= (s + 1) \frac{d.}{d\alpha} \iint P (1 - y)^s \alpha dy dz$$

Die hier aufzulösende Aufgabe fordert, dass

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + ia_i = x$$

und $b_1 + 2b_2 + 3b_3 + \ldots + ib_i = x'$ sey; gibt man also den ganzen positiven Zahlen a_1, a_2, a_3, ... a_i; b_1, b_2, b_3, ... b_i alle möglichen diesen Gleichungen genügenden Werthe, und nennt man P_1 die Summen aller denselben entsprechenden Werthe von P., und p die zu suchende Wahrscheinlichkeit, so ist

$$p = (s + 1) \frac{d.}{d\alpha} \iint (1 - y)^s P_1 \alpha dy dz.$$

Allein man kann X_m als den Coefficienten des Productes $t^{m a_m} \vartheta^{m b_m}$ in der Entwickelung der Potenz

$$\left(1 + \frac{y\alpha}{1-y}[zt^m + (1-z)\vartheta^m]\right)$$

betrachten, wobei t und ϑ unbestimmte Grössen vorstellen; daher ist P_1 der Coefficient von $t^x \vartheta^{x'}$ in der nach den Potenzen und den Producten der Potenzen von t und ϑ verrichteten Entwickelung des Productes

$$\left(1 + \frac{y\alpha}{1-y}[zt + (1-z)\vartheta]\right)^{x_1} \cdot \left(1 + \frac{y\alpha}{1-y}[zt^2 + (1-z)\vartheta^2]\right)^{x_2} \cdot$$
$$\ldots \times \left(1 + \frac{y\alpha}{1-y}[zt^i + (1-z)\vartheta^i]\right)^{x_i}$$

worans denn endlich folgt, dass die zu berechnende Wahrscheinlichkeit p der Coefficient von $t^x \vartheta^{x'}$ in der Entwickelung der Grösse

$$(s+1)\frac{d.}{d\alpha}\iint(1-y+y\alpha[zt+(1-z)\vartheta])^{x_1} \times$$
$$\times (1-y+y\alpha[zt^2+(1-z)\vartheta^2])^{x_2} \times$$
$$\times \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\times (1-y+y\alpha[zt^i+(1-z)\vartheta^i])^{x_i} \,.\, \alpha dydz$$

seyn muss, wenn man nach der Differenziation $\alpha = 1$ nimmt und die Integrale von $y = 0$ bis $y = 1$ und von $z = 0$ bis $z = 1$ ausdehnt.

Die hier gebrauchte Analyse führt auch noch zum Ziele, wenn man mehr als zwei Reihen nach einander gezogener Kugeln betrachten wollte.

6.

Sind die Zahlen x_1, x_2, $x_3 \ldots x_i$ gross, und ihrer sehr viele vorhanden, so ist es äusserst beschwerlich den zur Auflösung der vorhergehenden Aufgabe

erforderlichen Coefficienten genau zu berechnen, und man muss zu Annäherungsmethoden seine Zuflucht nehmen. Folgende ist zu dem beabsichtigten Zwecke dienlich:

Es sey der Kürze wegen

$$1 - \alpha[zt + (1 - z)\vartheta] = z_1$$
$$1 - \alpha[zt^2 + (1 - z)\vartheta^2] = z_2$$
$$1 - \alpha[zt^3 + (1 - z)\vartheta^3] = z_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$1 - \alpha[zt^i + (1 - z)\vartheta^i] = z_i$$

ferner

$$(1 - yz_1)^{x_1}(1 - yz_2)^{x_2}(1 - yz_3)^{x_3}\ldots(1 - yz_i)^{x_i} = Y$$

endlich $U = (s + 1)\frac{d.}{d\alpha}\iint Y\alpha dydz$, so handelt es sich darum das Integral $\int Ydy$ durch eine convergirende Reihe auszudrücken. Man setze desshalb

$$V = -\frac{Ydy}{dY}, \text{ also } Y = -V\frac{dY}{dy},$$

so wird $\iint Ydy = -\int VdY$ oder

$$\int Ydy = -YV + \int YdV = -YV - \int\frac{VdV}{dy}dY$$
$$= -YV - YV\frac{dV}{dy} + \int Yd\left(V\frac{dV}{dy}\right)$$
$$= -YV - YV\frac{dV}{dy} - \int V\frac{d\left(\frac{VdV}{dy}\right)}{dy}dV$$
$$= -YV - YV\frac{dV}{dy} - YV\frac{d\left(\frac{VdV}{dy}\right)}{dy}$$
$$+ \int Vd\left(V\frac{d\left(\frac{VdV}{dy}\right)}{dy}\right) = \text{etc.}$$

folglich, wenn man die Integration von $y = 0$ bis $y = 1$ ausdehnt:

$$\int Y dy = Y_0 \left\{ V_0 + V_0 \frac{dV_0}{dy} + V_0 \frac{d\left(V_0 \frac{dV_0}{dy}\right)}{dy} + V_0 \frac{d\left(V_0 \frac{d\left(V_0 \frac{dV_0}{dy}\right)}{dy}\right)}{dy} + \ldots \right\}$$

$$- Y_1 \left\{ V_1 + V_1 \frac{dV_1}{dy} + V_1 \frac{d\left(V_1 \frac{dV_1}{dy}\right)}{dy} + V_1 \frac{d\left(V_1 \frac{d\left(V_1 \frac{dV_1}{dy}\right)}{dy}\right)}{dy} + \ldots \right\}$$

wobei die Zeiger o und 1 darauf aufmerksam machen sollen, dass nach verrichteter Differenziation $y = 0$ und $y = 1$ zu nehmen ist. Diese Reihe ist eine derjenigen, welche Laplace zur näherungsweisen Berechnung der Integrale von Functionen grosser Zahlen angegeben hat. Der zweite Theil der obigen Formel, welcher der Substitution $y = 1$ entspricht, bietet, wie man leicht sieht, bloss solche Glieder dar, in welchen die Potenzen und Producte der Potenzen von t und ϑ mit Exponenten, deren Summe die Zahl $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + ix_i$ übertrifft, versehen sind; er fällt daher in gegenwärtiger Untersuchung ganz weg und man hat wegen $Y_0 = 1$

$$\int Y dy = V_0 \left[1 + \frac{dV_0}{dy} + \frac{d\left(V_0 \frac{dV_0}{dy}\right)}{dy} + \frac{d\left(V_0 d\left(V_0 \frac{dV_0}{dy}\right)\right)}{\frac{dy}{dy}} + \ldots \right]$$

Man findet ferner

$$V = \frac{1}{\frac{x_1 z_1}{1 - y z_1} + \frac{x_2 z_2}{1 - y z_2} + \frac{x_3 z_3}{1 - y z_3} + \ldots + \frac{x_i z_i}{1 - y z_i}}$$

Entwickelt man den Nenner dieses Ausdruckes nach den Potenzen von y und setzt man, insofern m eine ganze positive Zahl vorstellt,

$$x_1 z_1^m + x_2 z_2^m + x_3 z_3^m + \ldots + x_i z_i^m = Z_m$$

so ergibt sich

$$V = \frac{1}{Z_1 + Z_2 y + Z_3 y^2 + Z_4 y^3 + \text{etc.}}$$

folglich nach verrichteter Substitution in dem Ausdrucke für $\int Y dy$,

$$\int Y dy = \frac{1}{Z_1} - \frac{Z_2}{Z_2^3} + \frac{3Z_1^2 - 2Z_1 Z_3}{Z_1^5} - \frac{15Z_1^3 - 20Z_1 Z_2 Z_3 + 6Z_1^2 Z_4}{Z_1^7}$$

Diese Reihe convergirt, wenigstens in ihren ersten Gliedern, um so mehr, je grösser die Zahlen $x_1, x_2, x_3 \ldots x_i$ folglich auch $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ sind; zuletzt aber geht sie in eine divergirende Reihe über, da die numerischen Coefficienten, welche in den Zählern ihrer Glieder erscheinen, fortwährend wachsen.

Jedoch ist der convergirende Theil derselben zur näherungsweisen Darstellung des Integrals tauglich, und man kann, indem man sich vor der Hand auf das erste Glied beschränkt,

$$U = (s + 1) \frac{d.}{d\alpha} \int \frac{\alpha dz}{Z_1}$$

gelten lassen. Nun ist

$$Z_1 = s - \alpha z T - \alpha(1 - z)\Theta$$

wenn man

$$x_1 t + x_2 t^2 + x_3 t^3 + \ldots + x_i t^i = T$$

und $x_1 \vartheta + x_2 \vartheta^2 + x_3 \vartheta^3 + \ldots + x_i \vartheta^i = \Theta$ setzt, folglich nach verrichteter Differenziation und der Substitution $\alpha = 1$

$$U = \int \frac{(1 + s)sdz}{(s - zT - (1 - z)\Theta)^2}$$

und wenn man innerhalb den Grenzen $z = 0$ und $z = 1$ integrirt

$$U = \frac{(s+1)s}{T - \Theta} \left(\frac{1}{s - T} - \frac{1}{s - \Theta} \right)$$

$$= \frac{s+1}{s} \left(1 - \frac{T}{s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\Theta}{s}\right)^{-1};$$

der Coefficient von $t^x \vartheta^{x'}$ in der Entwickelung dieses Ausdruckes ist ein angenäherter Werth, der in der zweiten Aufgabe geforderten Wahrscheinlichkeit p.

7.

Die Wahrscheinlichkeit aus s Kugeln, worunter x_1, mit Nr. 1, x_2 mit Nr. 2 u. s. w., x_i mit Nr. i bezeichnet sind, unter der Voraussetzung, dass jede gezogene Kugel alsogleich wieder zurückgestellt werde, in einer festgesetzten Ordnung a_1 Kugeln mit Nr. 1, a_2 mit Nr. 2 etc. a_i mit Nr. i herauszuhe-

hen ist nach den oben angeführten Principien dem Producte

$$\left(\frac{x_1}{s}\right)^{a_1} \left(\frac{x_2}{s}\right)^{a_2} \left(\frac{x_3}{s}\right)^{a_3} \cdots \left(\frac{x_i}{s}\right)^{a_i}$$

gleich. Ist aber die Ordnung, in welcher die Kugeln erscheinen, gleichgültig, so muss dieses Product noch mit der Versetzungszahl der gezogenen Kugeln, nämlich mit

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots a_1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots a_2 \text{ etc. } 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots a_i}$$

multiplicirt werden, wobei n die Summe $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_i$ bedeutet. Soll die Summe der Nummern der n gezogenen Kugeln $= x$ seyn, wie auch immer die Anzahl der Kugeln jeder einzelnen Gattung ausfallen mag, so ist bloss nöthig, dass die Gleichung

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + ia_i = x$$

erfüllt werde, und die Wahrscheinlichkeit dieses Erfolges wird durch die Summe der Werthe ausgedrückt, welche das Product

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{1 \ldots a_1 \cdot 1 \ldots a_2 \text{ etc. } 1 \ldots a_i} \left(\frac{x_1}{s}\right)^{a_1} \left(\frac{x_2}{s}\right)^{a_2} \cdots \left(\frac{x_i}{s}\right)^{a_i}$$

für alle Auflösungen dieser Gleichung annimmt, oder was dasselbe ist, diese Wahrscheinlichkeit ist dem Coefficienten von t^x in der Entwickelung der Potenz

$$\left(\frac{x_1}{s} t + \frac{x_2}{s} t^2 + \frac{x_3}{s} t^3 + \ldots + \frac{x_i}{s} t^i\right)^n$$

gleich, welche Potenz der in 6 angenommenen Bezeichnung gemäss durch $\left(\frac{T}{s}\right)^n$ vorgestellt werden kann. Ist endlich auch die Anzahl n der gezogenen Kugeln willkührlich, wenn nur die Summe ihrer

Nummern = x wird, so wird die Wahrscheinlichkeit dieses Erfolges offenbar durch den Coefficienten von t^x in der Summe

$$\frac{T}{s} + \left(\frac{T}{s}\right)^2 + \left(\frac{T}{s}\right)^3 + \ldots.$$

angegeben, wobei es einerlei ist, ob man dieselbe bis zum Gliede $\left(\frac{T}{s}\right)^x$ oder in das Unendliche fortsetzt, und das Resultat keine Aenderung erleidet, wenn man auch noch die Einheit zu derselben addirt. Man kann daher sagen, die Wahrscheinlichkeit des letzterwähnten Erfolges werde durch den Coefficienten von t^x in der unendlichen Reihe

$$1 + \frac{T}{s} + \left(\frac{T}{s}\right)^2 + \left(\frac{T}{s}\right)^3 + \text{etc.} = \left(1 - \frac{T}{s}\right)^{-1}$$

gemessen.

Aus demselben Grunde ist die Wahrscheinlichkeit aus der vorhandenen Menge von Kugeln durch wiederholte Züge genau die Summe x′ darzustellen dem Coefficienten von $\Theta^{x'}$ in der Entwickelung des Ausdruckes

$$\left(1 - \frac{\Theta}{s}\right)^{-1}$$

gleich, worin Θ dieselbe Bedeutung hat, wie in 6.

Es wird demnach die Wahrscheinlichkeit in einer ersten Reihe von Zügen die Summe x, und zugleich in einer zweiten Reihe von Zügen die Summe x′ unter der Voraussetzung erscheinen zu sehen, dass jede gezogene Kugel sogleich wieder zu den übrigen hinzu komme, durch den Coefficienten von $t^x \Theta^{x'}$ in der Entwickelung des Productes

$$\left(1 - \frac{T}{s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\Theta}{s}\right)^{-1}$$

angezeigt, ein Ergebniss, welches von dem in 6 gefundenen Näherungswerthe der Wahrscheinlichkeit p um so weniger abweicht, je weniger sich der Bruch $\frac{s+1}{s}$ von der Einheit entfernt, d. h. je grösser s ist.

Dass die Wahrscheinlichkeit, in den beiden Reihen von Zügen die Summen x und x′ zu erhalten, bei einer grossen Menge von Kugeln jeder Gattung beinahe dieselbe bleibt, man mag die bereits gezogenen Kugeln zurückstellen oder nicht, ist für sich evident, und daher kann das so eben gefundene Resultat als eine Bestätigung der Richtigkeit der in 6 auseinander gesetzten Annäherungs-Methode dienen.

8.

Poisson findet, indem er die numerischen Werthe der Grössen s, x_1, x_2, x_3 . . . x_i, welche am Anfange der ersten Parthie bei dem Spiele trente et quarante Statt finden, nämlich

$s = 312$, $x_1 = x_2 = x_8 = \text{etc.} = x_8 = x_9 = 24$, $x_{10} = 96$

in die so eben entwickelten Formeln einführt, wenn bloss das erste Glied des obigen Ausdruckes für $\int Y dy$ berücksichtiget wird, die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens der Summe 31 in beiden Zügen der ersten Parthie $= 0{,}021993$; mit Hülfe des zweiten Gliedes von $\int Y dz$ erhält er diese Wahrscheinlichkeit $= 0{,}021967$. — Die folgenden Glieder von $\int Y dy$ haben auf die sechste Decimalstelle des Resultates keinen Einfluss.

Da die Gruppirung der Kartenblätter, welche in den Zügen der ersten Parthie erscheint, bei einer andern Mischung derselben sich in jeder folgenden Parthie hätte einstellen können, so ist, ehe das Spiel beginnt, die Wahrscheinlichkeit bei irgend einer Parthie eine Wiederhohlung der Summe 31 zu erhalten, der in Bezug auf die erste Parthie berechneten Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses vollkommen gleich. Die erwähnte Wahrscheinlichkeit wechselt während des Spiels nur für jene Personen, welche von den bereits gezogenen Karten genaue Kenntniss haben.

Sollte also der Banquier auf den ihm sonst zugestandenen Vortheil gegen eine billige Entschädigung Verzicht leisten, so müsste jeder Spieler demselben, ehe das Spiel beginnt, bei jeder einzelnen Parthie, die ungültigen mitgerechnet, eine Abgabe von ungefähr 0,022 Theilen seines halben oder von 11 Tausendtheilen seines ganzen Einsatzes zusichern.

II. Beweis der Unmöglichkeit eine vollständige algebraische Gleichung mit einer unbekannten Grösse, deren Grad den vierten übersteigt, durch eine geschlossene algebraische Formel aufzulösen.

(Nach Paolo Ruffini's Rifflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali. Modena 1813.)

In dem ersten Hefte des von Crelle kürzlich eröffneten Journales für die reine und angewandte

Mathematik wird ein scharfsinniger Aufsatz von Abel mitgetheilt, worin die Unmöglichkeit algebraische Gleichungen vom fünften Grade allgemein aufzulösen, erwiesen, und dem zu Folge auch die Unmöglichkeit der Auflösung algebraischer Gleichungen von höheren Graden ausgesprochen wird. Da es vortheilhaft ist, einen so wichtigen und interessanten Gegenstand von mehreren Seiten zu betrachten, so glauben wir unsern Lesern einen kleinen Dienst zu erzeigen, wenn wir hier den von Ruffini herrührenden, und, wie es scheint, wenig bekannten Beweis des oben genannten Theorems in Erinnerung bringen, und denselben durch eine möglichst deutliche Auseinandersetzung seiner Gründe, auch Anfängern im Studium der höhern Mathematik zugänglich machen.

Ruffini hat sich zu wiederholten Malen bemüht, einen überzeugenden Beweis des erwähnten Satzes zu Stande zu bringen. Schon in seiner grösstentheils auf Lagrange's tiefsinnige Forschungen (Mémoires de Berlin 1770. 1771) gebauten *Teoria generale delle equazioni*, Bologna 1799 parte VI Capo 13 versuchte er die Unmöglichkeit der allgemeinen Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade zu rechtfertigen. In den *Memorie di matematica e di fisica della società italiana delle science* Tomo X parte VI gab er einen dieser Societät gegen das Ende des Jahres 1802 vorgelegten neuen Beweis desselben Satzes, welchen er auch auf die Gleichungen der höheren Grade ausdehnte. Diese beiden Beweise gehen darauf aus, zu zeigen, dass die geforderte Auflösung der Gleichungen auf keinem sich dazu darbietenden Wege gelin-

gen kann. Nachdem Ruffini in späteren Abhandlungen noch öfters diesen Gegenstand berührte, erschienen seine oben angeführten *Riflessioni*, welche die Unmöglichkeit einer allgemeinen Auflösungsformel der algebraischen Gleichungen von höheren Graden als dem vierten *a priori* darthun. Die *Memorie dell' imperiale reale istituto del regno Lombardo-Veneto* vol. I. (Anni 1812 et 1813) Milano 1819. enthalten auch eine von Antonio Caccianino verfasste Darstellung der Hauptpuncte dieses Beweises, welche uns jedoch weniger befriedigend zu seyn scheint, als die ursprünglich von Ruffini gewählte Form desselben.

1.

Es sey

(1) $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \ldots Hx + K = 0$

eine vollständige geordnete Gleichung vom mten Grade, in welcher die Coefficienten der successiven Potenzen der unbekannten Grösse x keine bestimmten numerischen Werthe besitzen und von einander gänzlich unabhängig sind; ferner seyen

$$a, b, c, \ldots\ldots h, k$$

die m Wurzeln dieser Gleichung, so ist bekanntlich A die Summe der Grössen

$-a, -b, -c, \ldots -h, -k$; B ist die Summe ihrer Amben, C die Summe ihrer Ternen u. s. w., endlich k ihr Product.

Wird nun der Gleichung (1) Genüge geleistet, wenn man

(2) $$x = \varphi(A, B, C, \ldots H, K)$$

setzt, wobei φ eine algebraische Function der Coef-

ficienten A, B, C, . . . H, K andeutet, so muss die Function

$$\varphi\,(A, B, C, \ldots H, K)$$

wenn man in derselben A, B, C, . . . H, K durc die Wurzeln a, b, c . . . h, k ausdrückt, unabhä gig von jeder speciellen Bedeutung dieser Wurz durch blosse Reduction ihrer Glieder, sich auf e der Grössen a, b, c, . . . h, k zusammenziehen las

Nehmen wir an, sie reducire sich auf a. wechselt man, nachdem die Grössen a, b, c, . . . auf die so eben beschriebene Weise in die Fo (2) eingeführt worden sind, die Grössen b, c, h, k unter einander nach Belieben, so gibt diese mel offenbar das vorige Resultat x = a; sie aber in x = b oder in x = c über u. s. w., b oder wenn c u. s. w. an die Stelle von a tri

Alles hier Gesagte lässt sich leicht durc Betrachtung der bekannten Auflösungsformel fi quadratischen Gleichungen, und wenn man d was längere Rechnung nicht scheut, auch jene für die cubischen Gleichungen ansch machen.

2.

Da die Coefficienten A, B, C, . . . H, K s trische Functionen der Wurzeln a, b, c, . . sind, so würde die Formel (2) nach vollb Einführung dieser Wurzeln symmetrisch aus also bei allen gegenseitigen Vertauschungen de sen a, b, c, . . . h, k nur eines einzigen Re fähig seyn, wenn sie keine Wurzelgrössen en



$z^{q'} - 1 = 0$, $z^{q''} - 1 = 0$, $z^{q'''} - 1 = 0$ etc.;
endlich setze man $\beta\sqrt[q]{F} = R$, $\beta'\sqrt[q']{F'} = R'$,
$\beta''\sqrt[q'']{F''} = R''$, $\beta'''\sqrt[q''']{F'''} = R'''$ etc.

Auf gleiche Weise seyen $F_{,}$, $F_{,}'$, $F_{,}''$, $F_{,}'''$, ... was immer für algebraische rationale Functionen aller mit P, Q, R bezeichneten Functionen und im Sinne der obigen Bezeichnungen

$\gamma\sqrt[r]{F_{,}} = S$, $\gamma'\sqrt[r']{F_{,}'} = S'$, $\gamma''\sqrt[r'']{F_{,}''} = S''$ etc. u. s. w.
so ist keine irrationale algebraische Function von A, B, C, ... H, K denkbar, welche nicht als eine algebraische rationale Function der Grössen betrachtet werden könnte, welche wir oben durch die Buchstaben P, Q, R, S.... vorgestellt haben, daher wird diese Vorstellung auch auf die Formel (2) anwendbar seyn.

Man denke sich nun überall A, B, C, ... H, K durch a, b, c....h, k ausgedrückt und alle Wurzel-Extractionen verrichtet, so kann bewiesen werden, dass die in der Formel (2) erscheinende Function φ(A, B, C, ... H, K), sobald die Anzahl der Grössen a, b, c, ... h, k grösser ist als 4, d. h. sobald die Gleichung (1) von einem höheren Grade ist, als dem vierten, keine Aenderung erleidet, wenn man jede drei beliebige dieser Grössen a, b, c...h, k untereinander vertauscht.

Diesem widerspricht aber die oben auseinander gesetzte Beschaffenheit der Function φ(A, B, C.... H, K). Reducirt sich nämlich diese Function nach Einführung der Grössen a, b, c...h, k auf die Grösse a, so muss sie, wenn man drei dieser Grössen wor-

unter sich a befindet, z. B. a, b, c, unter einander verwechselt, was auf zwei Arten geschehen kann, indem kurz zu sprechen, die Stellung a, b, c entweder in b, c, a oder in c, a, b übergeht, nunmehr entweder den Werth b oder den Werth c darbieten.

Hieraus ergibt sich ohne allen Zweifel die Folgerung, dass die erwähnte Auflösungsformel (2) für Gleichungen, deren Grad den vierten überschreitet, unmöglich ist.

3.

Dass jede algebraische rationale Function der Grössen P, Q, R, S insofern diese letzteren als Functionen von a, b, c...h, k dargestellt erscheinen, sobald die Anzahl der Grössen a, b, c...h, k grösser ist als 4, bei jeder gegenseitigen Vertauschung dreier dieser letzteren Grössen ungeändert bleibt; ist bewiesen, wenn wir zeigen, dass überhaupt die durch wirkliche Extraction gewonnene pte Wurzel aus einer rationalen Function U der Grössen a, b, c..h, k durch keine gegenseitige Vertauschung dreier dieser Grössen geändert wird, wenn diese Eigenschaft der Function U selbst zukommt, und die Anzahl gedachter Grössen mehr als 4 beträgt.

Es seyen a, b, c die drei zu vertauschenden Grössen, und in Bezug auf eine anfängliche Stellung derselben

$$\sqrt[p]{U} = \Omega.$$

Die aus dieser Voraussetzung folgende Gleichung $\Omega^p = U$ ist eine identische, d. h. sie besteht unabhängig von jeder speciellen Bedeutung der Grössen

a, b, c...h, k, daher muss sie auch fort bestehen, wenn man die Grössen a, b, c in die neuen Stellungen b, c, a und c, a, b versetzt. Es gehe hierdurch Ω in Ω′ und Ω″ über, so hat man, weil U dabei ungeändert bleibt, auch $(\Omega')^p = U$ (und $(\Omega'')^p = U$, folglich sind Ω′ und Ω″ ebenfalls Werthe der pten Wurzel aus U. Allein jeder Werth der pten Wurzel aus einer Grösse U lässt sich aus jedem andern Werthe dieser Wurzel ableiten, wenn man den letztern mit einem schicklichen Werthe der pten Wurzel aus der Einheit multiplicirt; daher hat man, wenn man diesen Werth von $\sqrt[p]{1}$ durch α vorstellt, $\Omega' = \alpha\Omega$; und weil Ω″ aus Ω′ nach demselben Permutationsgesetze entspringt, wie Ω′ aus Ω, aus demselben Grunde $\Omega'' = \alpha\Omega' = \alpha^2\Omega$. Vertauscht man die Grössen a, b, c in Ω″ auf dieselbe Weise, auf welche sie ihre Stellung bei dem Uebergange von Ω auf Ω′ und von Ω′ auf Ω″ geändert haben, so erhalten sie ihre ursprüngliche Stellung wieder zurück und Ω″ verwandelt sich desshalb wieder in Ω, daher hat man auch $\Omega = \alpha\Omega''$, d. h. $\Omega = \alpha^3\Omega$, folglich $\alpha^3 = 1$.

Man nehme nun zu den drei Grössen a, b, c, noch zwei andere z. B. d, e hinzu, so wird U nicht geändert, wenn erstlich die Stellung a, b, c, d, e in b, c, a, d, e übergeht, denn hier haben nur die drei Grössen a, b, c ihre Stellen gewechselt, was auf den Werth von U keinen Einfluss ausübt. Ferner ändert sich U nicht, wenn die Stellung b, c, a, d, e in b, c, d, e, a umgeändert wird, denn hier haben wieder nur drei Grössen a, d, e ihre Stellen vertauscht; daher erleidet U keine Aenderung wenn die anfängliche Stellung a, b, c, d, e sogleich durch b, c, d,

e, a ersetzt wird. Bildet man nun die Vertauschungen

a, b, c, d, e
b, c, d, e, a
c, d, e, a, b
d, e, a, b, c
e, a, b, c, d
a, b, c, d, e

wovon jede folgende aus der vorhergehenden nach einem und demselben Permutationsgesetze entspringt, und wie man sieht die 6te Stellung wieder der ersten gleich wird; so kann U, weil die Form dieser Function so beschaffen ist, dass die erste Umtauschung der fünf Grössen a, b, c, d, e ihren Werth ungeändert lässt, gerade dieser Form wegen auch durch die übrigen Umtauschungen keine Aenderung erfahren. Nennt man nun ω', ω'', ω''', ω^{IV}, ω^{V} die diesen Vertauschungen entsprechenden Werthe von Ω, so sind auch ω', ω'', ω''', ω^{IV}, wie sich durch die oben gebrauchte Schlussweise zeigen lässt, Werthe von $\sqrt[p]{U}$, folglich hat man, wenn β einen Werth von $\sqrt[p]{1}$ bedeutet,

$\omega' = \beta\Omega$, $\omega'' = \beta\omega' = \beta^2 x$, $\omega''' = \beta\omega'' = \beta^3 x$, $\omega^{IV} = \beta\omega''' = \beta^4 x$ endlich $\omega^{V} = \beta\omega^{IV} = \beta^5 x$. Aber es ist $\omega^{V} = \Omega$, weil die Grössen a, b, c, d, e in ω^{V} dieselbe Stellung haben wie in Ω, folglich ist $\Omega = \beta^5 \Omega$ und daher $\beta^5 = 1$.

Aus Ω', worin die Grössen a, b, c, d, e in der Stellung b, c, a, d, e erscheinen, leite man Ω'_1 nach demselben Gesetze ab, nach welchem Ω in ω' übergeht; so erhalten die genannten Grössen in Ω'_1 die Stellung c, a, d, e, b; ferner ist aus dem früher erwähnten Grunde Ω'_1 ein Werth von $\sqrt[p]{U}$ und $\Omega'_1 = \beta\Omega' = \alpha\beta\Omega$. Man bilde nach der bei dem Uebergange von

Ω auf Ω'_1 ersichtlichen Permutationsregel die Vertauschungen

a, b, c, d, e
c, a, d, e, b
d, c, e, b, a
e, d, b, a, c
b, e, a, c, d
a, b, c, d, e

und nenne Ω'_2, Ω'_3, Ω'_4, Ω'_5 die der dritten, vierten, fünften und sechsten Stellung gehörenden Werthe von Ω, so ist gleichfalls

$$\Omega'_2 = \alpha\beta\Omega'_1 = \alpha^2\beta^2\Omega, \quad \Omega'_3 = \alpha\beta\Omega'_2 = \alpha^3\beta^3\Omega$$

$$\Omega'_4 = \alpha\beta\Omega_3 = \alpha_4\beta_4\Omega, \quad \Omega_5 = \alpha\beta\Omega_4 = \alpha^5\beta^5\Omega.$$

Allein man hat $\Omega_5 = \Omega$, folglich ist $\alpha^5\beta^5 = 1$.

Nun ist, wie wir oben gefunden haben $\beta^5 = 1$, daher muss auch $\alpha^5 = 1$ seyn. Dividirt man diese Gleichung durch $\alpha^3 = 1$, so folgt $\alpha^2 = 1$, und aus diesen zwei letzteren Gleichungen ergibt sich $\alpha = 1$.

Wir gelangen somit endlich zu dem oben aufgestellten Satze, dessen Beweis durch das Stattfinden der Gleichung

$$\Omega = \Omega' = \Omega''$$

gegeben ist.

Untersucht man den Grund dieses Beweises, so findet man denselben nicht anwendbar, wenn die Anzahl der Grössen a, b, c . . . h, k geringer ist als 5. So gilt, wenn U bloss eine Function von drei Grössen a, b, c vorstellt, zwar die Gleichung $\alpha^3 = 1$, allein aus derselben folgt nur dann $\alpha = 1$, wenn der Wurzelexponent p den Factor 3 nicht enthält.

Auch sind die hier gemachten Schlüsse nicht zulässig wenn, von einer unvollständigen Gleichung die Rede ist, da unter den Wurzeln derselben Bedingungsgleichungen obwalten.

ZEITSCHRIFT
FÜR PHYSIK UND MATHEMATIK.

PHYSIKALISCHE ABTHEILUNG.

I. Untersuchungen über Magnetisirung des Eisens durch das Licht, nebst neuen Versuchen über denselben Gegenstand von A. Baumgartner.

1.

Bekanntlich hat schon vor ziemlich langer Zeit Morichini, ein gelehrter Physiker in Rom, bekannt gemacht, dass es ihm gelungen sey, Eisen dadurch zu magnetisiren, dass er es dem violetten Theil des prismatischen Farbenbildes aussetzte. Dr. Carpi in Rom und Marquis Ridolfi in Florenz wollen mit Erfolg den Versuch wiederhohlt haben, aber Dhombre Fermas und Professor Configliachi in Pavia bemühten sich vergebens, durch dieses Mittel Magnetismus zu erregen; selbst der anerkannte vortreffliche Experimentator Bérard bemerkte nur zufällig geringe Spuren von Magnetismus am Eisen, das er in die von Morichini angegebenen Umstände versetzte. Somit war die Richtigkeit seines

Verfahrens von den meisten deutschen, englischen und französischen Physikern stark in Zweifel gezogen, nur der Umstand, dass H. Davy im Jahre 1814 in Italien mit eigenen Augen ein unmagnetisches Stück Eisen im violetten Lichte stark magnetisch werden sah, und dass Playfair im Jahre 1817 selbst einem gelungenen Versuch beiwohnte, konnte Morichini in den Augen der Welt rechtfertigen.

Playfair äusserte sich über das Verfahren beim Versuche, den ihm Dr. Carpi in Rom in Abwesenheit Morichinis zeigte, mündlich gegen Brewster folgender Massen:

Wir erhielten das violette Licht auf die gewöhnliche Weise mittelst eines Prisma's und sammelten es im Brennpuncte einer hinreichend grossen Linse. Die Nadel bestand aus weichem Draht und zeigte, vorläufigen Versuchen gemäss, weder die mindeste magnetische Polarität, noch eine Einwirkung auf Eisenfeilspäne. Diese ward horizontal auf einer Unterlage mittelst Wachs befestiget und zwar so, dass sie den magnetischen Meridian unter einem rechten Winkel schnitt. Der Focus der violetten Strahlen wurde langsam längs der Nadel hingeführt, indem man von der Mitte aus gegen ein Ende zuschritt, und Sorge trug, dass nicht eben so zurückgegangen und die andere Hälfte der Nadel nicht vom Lichte berührt wurde. Nachdem die Nadel eine halbe Stunde auf diese Weise behandelt worden war, wurde sie genau untersucht, man fand an ihr weder eine Spur von Polarität, noch eine anziehende Kraft; allein als diese Operation um 25 Minuten länger fortgesetzt, die Nadel hierauf vom Lichte weggenommen, und auf eine

Spitze gestellt wurde, drehte sie sich mit grosser Lebhaftigkeit herum, und stellte sich in den magnetischen Meridian, so dass das Ende, welches im violetten Lichte stand, gegen Norden gewendet war. Sie zog Eisenfeilspäne an und trug sie; das dem Lichte ausgesetzte Ende stiess den Nordpol einer Magnetnadel ab. Keinem der Anwesenden blieb der mindeste Zweifel, dass die Nadel ihren Magnetismus der Einwirkung des Lichtes verdanke.

2.

So stand die Sache, als Mad. Sommerville durch die heiteren Tage im Jahre 1825 angeeifert, den Morichinischen Versuch neuerdings vornahm. Zu diesem Zwecke wurde ein dreiseitiges gleichseitiges Prisma aus Flintglas an die Oeffnung eines Fensterladens gestellt, und eine Nähnadel von etwa 1 Z. Länge, die den Nord- und den Südpol eines Magnetes auf gleiche Weise anzog, den violetten Strahlen des Farbenbildes, in der Entfernung von beiläufig 5 Fuss vom Fenster, ausgesetzt. Die Hälfte davon wurde mit Papier bedeckt, weil zu vermuthen war, dass die Entwickelung des Magnetismus durch das Licht nicht Statt finden könne, wenn die ganze Nadel seinem Einflusse ausgesetzt ist. Nach Verlauf von 2 Stunden fand man sie magnetisch, und zwar war das dem Lichte ausgesetze Ende der Nordpol. Dieser Versuch wurde mehrmals mit demselben glücklichen Erfolge wiederhohlt. Man bediente sich auch zu demselben Zwecke des blauen und grünen Theiles des Farbenbildes und fand eine ähnliche, aber dem Grade nach schwächere Wirkung; nur die indigo-

blauen Strahlen zeigten fast dieselbe Kraft wie die violetten; die orangefarbnen, gelben und rothen übten keinen magnetisirenden Einfluss aus.

3.

Die erwärmenden Strahlen des Farbenbildes konnten keine magnetische Kraft im Eisen erwecken, wiewohl der Versuch mit ihnen in drei auf einander folgenden Tagen vorgenommen wurde. Hieraus ergibt sich deutlich, dass die magnetisirende Kraft des Lichtes nicht auf Rechnung der sie begleitenden Wärmestrahlen komme, wiewohl dieses schon daraus klar ist, dass die magnetisirende Kraft gerade in jenen Strahlen am intensivsten wirkt, wo allen Versuchen zu Folge die erwärmende Wirkung am kleinsten ist.

4.

Mad. Sommerville setzte auch Uhrfedern von etwa $1\frac{1}{2}$ Z. Länge und $\frac{1}{8}$ — $\frac{1}{4}$ Z. Breite, die entweder ursprünglich nicht magnetisch waren, oder denen ihre magnetische Kraft durch Wärme genommen war, auf die vorhin genannte Weise den violetten Lichtstrahlen aus, und fand, dass immer das beleuchtete Ende ein Nordpol wurde. Es schien sogar, als bekämen sie den Magnetismus durch dieses Verfahren leichter als Nadeln, wahrscheinlich weil sie dem Lichte eine grössere Oberfläche darboten, und blau angelaufen waren; ein Pfriemen wurde aber nicht magnetisch, weil seine Masse wahrscheinlich zu gross war. Wurden die violetten Lichtstrahlen mittelst einer Linse von grosser Oeffnung, wie sie Wollaston zur Prüfung der chemischen Wirkung des Lichtes an-

wendete, concentrirt, so entwickelten sie viel schneller den Magnetismus, als wenn dieses nicht der Fall war. Man fand auch, dass diese Versuche gerade kein verfinstertes Zimmer fordern, sondern dass es hinreichend sey, das Farbenbild an einen Ort hinzuführen, der nicht von directem Sonnenlichte beschienen ist.

5.

Auch das violette Licht, welches gefärbte Gläser durchlassen, fand M. Sommerville wirksam zur Magnetisirung, wenn nur die Hälfte des zu magnetisirenden Eisens stets wie bei den vorigen Versuchen bedeckt war. Hinter grünen Gläsern erfolgte dasselbe. Man konnte diese Wirkung keineswegs dem Einflusse den chemisch agirenden Strahlen zuschreiben, weil Papier, das mit salzsaurem Silber überstrichen war, und hierauf der Wirkung des Sonnenlichtes ausgesetzt wurde, hinter einem blauen und hinter einem gewöhnlichen Glase in derselben Zeit in gleichem Grade geschwärzt wurde, während doch die magnetische Einwirkung der Lichtstrahlen, die von beiden Gläsern auf das Eisen geleitet wurden, sehr verschieden war.

6.

Mad. Sommerville machte auch Versuche mit Nadeln, die sie zur Hälfte in grüne und blaue Bänder einwickelte, während die andere Hälfte mit Papier bedeckt war. Wurden diese, einen Tag lang, dem Einflusse des Sonnenlichtes hinter einer Fensterscheibe ausgesetzt, so erlangten sie auch magnetische Polarität; aber Nadeln, die in rothe, orangefarbene oder gelbe Seide eingewickelt waren, blieben

unmagnetisch. Die schicklichste Zeit zu solchen Versuchen soll die Mittagsstunde oder 1 Uhr nach Mittag seyn. Wenn die Jahrszeit einmal weit vorgerückt war, fand man die entwickelte magnetische Kraft schwächer und minder lang anhaltend.

7.

So viel ist über die Magnetisirung durch Einfluss des Lichts bis jetzt zur allgemeinen Kenntniss gelangt, und dieses ist gewiss hinreichend, Freunde der Naturwissenschaft zur Wiederhohlung dieser interessanten Versuche einzuladen. Ich konnte diesem Reitze nicht widerstehen, versuchte die oben angegebenen Phänomene auch hervorzubringen, und hielt mich dabei ganz genau an die von Mad. Sommerville angegebene Behandlungsweise. Dünnen Eisendraht fand ich, als er in einem verfinsterten Zimmer nur wenige Minuten dem violetten Theile des Farbenbildes ausgesetzt ward, so stark magnetisch, dass er auf einen Pol einer astatischen Doppelnadel stark abstossend wirkte; jedoch gelang mir dieses nicht an jedem Tage bei demselben Verfahren auf gleiche Weise, woran wahrscheinlich die Lichtstärke, die mir zu Gebothe stand, Schuld ist.

Um auch den Versuch über die Wirkung des von gefärbten Gläsern durchgelassenen Lichts zu machen, schloss ich zwei gewöhnliche Nähnadeln in ein hölzernes schwarz polirtes Kästchen ein, das zwei einander gegenüber stehende Ausschnitte, wie Fenster, hatte, welche mit violetten Gläsern vermacht waren.

Als ich das Sonnenlicht an zwei auf einander fol-

genden Tagen jedesmal 7 Stunden darauf einwirken liess, fand ich beide Nadeln magnetisch. Der von Papier entblösste Theil war der Nordpol. Allein die Kraft, womit er den Nordpol einer anderen sehr empfindlichen Magnetnadel abstiess, war sehr schwach, und verlor sich nach einigen Stunden wieder gänzlich.

8.

Das Interessanteste an den Resultaten aller dieser Versuche ist, dass man daraus ersieht, es komme bei der Magnetisirung des Eisens durch das Licht nicht auf die absolute Beleuchtung, sondern auf die Differenz der Beleuchtung einzelner Theile desselben an. Morichini strich ein Ende einer zu magnetisirenden Nadel mit violetten durch eine Linse verdichtetem Lichte, und nahm sich in Acht, das andere Ende mit Licht zu berühren, M. Sommerville beugt der Beleuchtung der einen Hälfte der eisernen Nadel durch einen papiernen Schirm vor.

Die Anwendung einer Sammellinse erhöht den Unterschied der Beleuchtung der beiden Hälften der Nadel und beschleuniget zugleich die Erregung der magnetischen Kraft in ihr.

9.

Es zeigt sich hierin zwischen diesen Erscheinungen und den von Seebek in ungleich erwärmten Metallen hervorgebrachten eine sehr grosse Uebereinstimmung; denn Seebek lehrte in allen, besonders in den leicht krystallisirbaren Metallen durch ungleiche Erwärmung eben so Magnetismus zu er-

regen, wie dieses Morichini und M. Sommerville im Eisen durch ungleiche Beleuchtung zeigen. Der Magnetismus, welcher durch das Seebek'sche Verfahren rege gemacht wird, ist allerdings nur vorübergehend, und hält nur so lange an, als die Temperaturdifferenz dauert, während der durch Licht im Eisen hervorgerufene wie der durch Streichen erzeugte anhält; allein man weiss ja, dass überhaupt nur Eisen, Nickel und Kobalt dauernden Magnetismus annehmen, und man kennt bis jetzt kein Mittel, in den anderen Metallen diese Kraft zu fixiren, wiewohl man sie auch durch einen electrischen Strom und durch Annäherung eines Magnetes in einen momentanen magnetischen Zustand versetzen kann, über welchen letzteren Punct insbesondere die Ablenkung einer Magnetnadel durch rotirende Metallscheiben, die im zweiten Hefte dieses Bandes enthalten sind, hinreichende Aufklärung geben. Ein anderer Unterschied zwischen der Erregung des Magnetismus im Eisen durch Licht und der in anderen Metallen durch Wärme, scheint nach den vorliegenden Versuchen darin zu bestehen, dass zu ersterem Zwecke gerade nur violettes, blaues oder grünes Licht, mithin ein Strahl von bestimmter Natur nothwendig ist, während man zu letzterem Zwecke die Wärme, sie mag von was immer für einer Quelle herkommen, gleich tauglich findet. Dabei bleibt aber der Umstand sehr merkwürdig, dass die Wirkung des violetten Lichtes in Betreff der Erregung einer magnetischen Thätigkeit mit seinen anderwärtigen Eigenschaften, und ihren Verhältnissen zur magnetischen Kraft im besten Einklange steht. Das violette Licht

ist von den wenigsten Wärmestrahlen begleitet, diese aber schwächen die magnetische Kraft; das violette Licht bewirkt leichter als jedes andere eine Desoxydation, d. i. eine Trennung eines Stoffes vom Oxygen und dieser ist bekanntlich einer der grössten Feinde des Magnetismus.

10.

Da die rothen, orangefarbigen und gelben Strahlen in dem Theile eines Eisenstückes, das sie bescheinen, gar keinen Magnetismus erzeugen, so scheint es, als sey man einigermassen berechtiget anzunehmen, sie können auch den von anderen Strahlen erregten nicht aufheben und vernichten, weil nach der gewöhnlichen Vorstellungsweise ein magnetischer Pol nur durch einen entgegengesetzten neutralisirt werden kann.

Ist dieses richtig, so muss auch directes, unzerlegtes Sonnenlicht, das einen Eisenstab an einem Theile stärker als am anderen trifft, in dem stärker erleuchteten Theile einen Nordpol erzeugen, und zwar schneller, als es violettes Licht zu thun vermag, weil im weissen Lichte die violetten, blauen und grünen Strahlen zugleich wirken.

11.

Um die Richtigkeit dieses Schlusses zu prüfen, verschaffte ich mir kreisrunde Stängelchen englischen Stahles, deren Durchmesser $\frac{1}{3}$ L. betrug. Jedes derselben wurde durch schnelles Abbrechen, in mehrere Stücke, von etwa 3 Z. Länge, getheilt, und untersucht, ob sich in ihnen kein freier Magnetismus be-

finde. Traf man auch nur die geringste Spur davon an, so wurde es völlig ausgeglüht, und nach dem Erkalten wieder untersucht. Selten traf es sich auch dann noch, dass man irgend eine magnetische Polarität bemerken konnte. Die Untersuchung wurde mittelst einer ungemein empfindlichen Magnetnadel vorgenommen, die aus zwei Stücken feinen Uhrfederstahles bestand, wovon jedes mit zwei magnetischen Polen versehen war. Beide Stücke waren mittelst einer Art Gabel aus Messing in eine solche Richtung gebracht, dass sie dem Anscheine nach eine einzige Magnetnadel vorstellten, die aber an den beiden Enden gleichnamige Pole hatte, und daher fast astatisch war. An dem Messingstücke war ein Hütchen aus Glas angebracht. Bei der Untersuchung auf Magnetismus wurde nicht bloss darauf geachtet, ob ein bestimmter Pol der Magnetnadel von einem Ende des zu prüfenden Stahlstängelchens angezogen, vom anderen abgestossen wurde, sondern auch, ob die Anziehung an einem Ende stärker als am anderen sey. In jedem Falle, wo es sich darum handelte, zu erkennen, ob ein Stahlstück schon vor dem damit vorzunehmenden Versuche ganz unmagnetisch sey, wurde letzteres nur dann angenommen, wenn das Stück völlig gleich auf beide Pole wirke; wo aber die Erzeugung des Magnetismus durch einen Versuch beabsichtiget war, da wurde eine Nadel nicht für magnetisch gehalten, wenn sie nicht auf einen Pol der astatischen Doppelnadel abstossend wirkte, sondern der Versuch zu denjenigen gezählt, deren Resultat zweideutig ist.

12.

Es wurden nun sechs Stahlnadeln, die völlig unmagnetisch befunden wurden, an einem Ende polirt, am anderen behielten sie die Farbe und Oberfläche bei, mit der sie verkauft werden, und ich war Willens, sie am polirten Ende anlaufen zu lassen, damit dadurch selbst in dem Falle, wo sie dem directen, unzerlegten Sonnenlichte ausgesetzt waren, eine Ungleichheit in der Beleuchtung beider Hälften Statt finden möchte. Sie blieben aber, bevor der eigentliche Versuch vorgenommen werden konnte, einige Stunden abgesondert von einander liegen. Als ich sie wollte anlaufen lassen, untersuchte ich sie noch vorläufig auf Magnetismus, und sah, dass jedes polirte Ende ein Nordpol, jedes unpolirte ein Südpol sey. Wiewohl ich zuerst die Meinung fasste, dass dieser Magnetismus durch die mit dem Poliren verbundene Erschütterung hervorgebracht worden sey, so musste mir doch der Umstand einigermassen interessant seyn, dass ohne Ausnahme gerade das glänzendere Stück der Nordpol sey. Noch mehr wurde meine Aufmerksamkeit rege gemacht, als von neun anderen auf gleiche Weise zubereiteten Stücken jedes am polirten Ende einen Nordpol, am anderen einen Südpol hatte. Dass keine Mittheilung des Magnetismus durch einen, etwa beim Poliren gebrauchten Körper Statt gefunden habe, liess das Verfahren, welches dabei angewendet wurde, mit ziemlicher Zuverlässigkeit voraussetzen. Es wurde nämlich das Stahlstück in einem Kloben mit messingenen Backen befestiget, auf eine hölzerne Unterlage ge-

legt, mit einem sogenannten Oehlstein geschliffen, und dann mittelst Kalk und einem Stücke Holz (meistens aber doch nicht immer Lindenholz), fein polirt. Der einzige etwas bedenkliche Umstand war der, dass die hölzerne Unterlage in einem Schraubstock befestiget war, der auf dem magnetischen Meridian nicht senkrecht stand, sondern einen Winkel von etwa 45° damit machte.

13.

Um mich zu überzeugen, in wie weit die beim Poliren Statt habende Erschütterung auf die Erregung des Magnetismus Einfluss habe, wurde eine Nadel, als sie nur unvollkommen polirt war, auf Magnetismus untersucht, und völlig unmagnetisch befunden, dann das Poliren bis zur Erlangung eines hinreichenden Glanzes fortgesetzt, und wieder mit einer Magnetnadel geprüft. Auch da konnte keine Spur von Magnetismus wahrgenommen werden. Als aber das so zubereitete Stück an einen Platz gelegt wurde, der vom directen Sonnenlichte beschienen war, und ich zugleich mittelst einer Loupe von 1 Zoll Oeffnung verdichtete Lichtstrahlen auf den polirten Theil leitete, und sie so etwa 3 Minuten einwirken liess, fand ich diesen Theil mit einem starken Nordpol, den andern mit einem starken Südpol versehen. Ich glaubte nun annehmen zu können, dass der Magnetismus durch ungleiche Beleuchtung der zwei Hälften der Stahlnadel erzeugt worden sey.

14.

Wenn der aus dieser Erfahrung gezogene Schluss

richtig ist, so muss sich noch leichter im Lichte magnetische Kraft erregen lassen, wenn man ein Stahlstück gut ausglüht, wodurch es mit einer schwarzen Oxydhaut überzogen wird, und erst dann an einem Ende polirt; denn da ist der Unterschied der Erleuchtung in beiden Theilen noch grösser, als wenn man neben dem polirten Theil einen anderen übrig lässt, der die natürliche Stahlfarbe hat; auch muss man an einem Stahlstück mehrere magnetische Pole erzeugen können, wenn man es an mehreren Stellen polirt, so dass die glänzenden Stellen durch unpolirte dunkle getrennt sind. Wie sehr diese Meinung durch die Erfahrung bestätiget wird, zeigen die folgenden Versuche:

a) Neun Stahlstücke, deren jedes an einem Ende polirt war, während es am anderen die beim Ausglühen erhaltene schwarze Oxydhaut beibehielt, erlangten nach dem Poliren an einem von der Sonne beschienenen Platze in Kurzem eine so starke magnetische Polarität, dass sie nicht bloss eine empfindliche Magnetnadel in der Entfernung eines Zolles stark afficiren, sondern auch mehrere (2 bis 5) kleine Stücke weichen Eisendrahtes tragen konnten. Jedes hatte am polirten Ende den Nordpol.

b) Ein Stück wurde stark ausgeglüht, auf Magnetismus untersucht, und als es unmagnetisch befunden war, an einem Ende gehärtet. Dieses Ende wurde bedeutend heller als der übrige Theil, weil beim Ablöschen im Wasser das Oxydhäutchen absprang. Am folgenden Tage zeigte es sich, wiewohl schwach magnetisch, und hatte auch am helleren Ende den Nordpol. Indess wäre es immer möglich, dass hier

die Erregung des Magnetismus durch die schnelle Abkühlung, und nicht so sehr durch den Einfluss des Lichtes erzeugt worden sey.

c) Zwei Stücke wurden ganz polirt, und zeigten weder auf der Stelle, noch als sie 8 Tage dem Sonnenlichte ausgesetzt gewesen waren, die geringste magnetische Kraft.

d) Drei andere Stücke wurden mit dem ganzen schwarzen Ueberzug, den sie beim Ausglühen erhielten, dem Sonnenlichte ausgesetzt, und waren selbst nach einer Woche nicht im mindesten magnetisch.

e) Drei Stücke wurden an der ganzen Oberfläche fein polirt. Als sie sich bei der Untersuchung als ganz unmagnetisch bewährt hatten, wurden sie zur Hälfte mit schwarzem Siegellak bedeckt und dann der Sonne ausgesetzt. Zwei davon waren nach etwa 6 Stunden magnetisch, und hatten am freien Ende ihren Nordpol, jedoch war ihre magnetische Kraft viel schwächer, als die in den vorhergehenden Stücken erzeugte. Am dritten Stücke konnte kein Magnetismus wahrgenommen werden.

f) Ein Stück wurde der ganzen Länge nach mit einem hellen Streifen mittelst des Polirens versehen, und dann wie die übrigen dem Lichte ausgesetzt, bekam aber keine magnetische Kraft.

g) Drei Stücke wurden in der Mitte polirt, behielten im übrigen aber ihre schwarze Oberfläche. Jedes derselben bekam im Sonnenlichte an den beiden Enden einen Südpol, hingegen in der Mitte, wo sich der polirte Theil befand, einen sehr starken Nordpol. Es waren deren wahrscheinlich zwei, lagen

einander aber so nahe, dass man sie nicht einzeln erkennen konnte.

h) Andere drei Stücke wurden an beiden Enden polirt, und behielten in der Mitte ihre dunkle Oberfläche. Auch bei diesen bewährte sich das schon aus den vorhergehenden Versuchen erkennbare Gesetz, und jedes Stück hatte an jedem Ende einen Nordpol, in der Mitte hingegen einen starken Südpol.

i) Ein Stück mit vier polirten Gürteln, welche durch fünf schwarze von einander getrennt waren, zeigte vier Nord- und fünf Südpole, als es etwa zwei Stunden dem Lichte ausgesetzt ward; allein am Tage nach dem Versuche konnte ich mich nur mehr von der Anwesenheit von vier magnetischen Polen überzeugen; die übrigen sind wahrscheinlich desshalb verloren gegangen, weil sie einander gar zu nahe waren. Unter den noch vorhandenen Polen waren die zwei äusseren, die beide Südpole waren, und der Regel gemäss an schwarzen Stellen ihren Sitz hatten, die kräftigsten.

Alle Stahlstücke, von denen bis itzt die Rede war, hatten eine Länge von 2 — $2\frac{1}{2}$ Zoll, und sind aus demselben englischen Stahle verfertiget, aus welchem die bei den ersten Versuchen angegebenen gemacht wurden. Einige von ihnen waren ausserhalb des Zimmers der Einwirkung des Sonnenlichtes ausgesetzt, andere im Zimmer selbst, immer lagen sie aber auf einem horizontalen Tische in einer Richtung, die auf dem magnetischen Meridiane entweder völlig senkrecht war, oder doch einen grossen Winkel mit ihm machte.

k) Ein Stahlstück von derselben Dicke, wie die

vorigen, und von einer Länge von 7 Zoll, bekam durch Poliren neun glänzende Stellen und behielt zehn dunkle, worunter auch die beiden Extremitäten gehörten. Als es einige Zeit dem Lichte ausgesetzt war, bemerkte man an einem Theile, vom Ende gegen die Mitte, fünf magnetische Pole, und zwar drei Südpole, zwischen denen zwei Nordpole befindlich waren. Am anderen Ende konnte nur ein Süd- und ein Nordpol bemerkt werden.

l) Der auffallendste Versuch unter allen, die angestellt wurden, und der am deutlichsten zeigt, dass der hier besprochene Magnetismus durch das Licht hervorgerufen werde, war folgender: Ein 2½ Z. langes Stahlstück wurde Nachts bei Kerzenlicht ausgeglüht, dann in völliger Finsterniss so lange polirt, bis man voraussetzen konnte, es sey schon ein hinreichender Glanz erzeugt worden, hierauf in eine bleierne Kapsel eingeschlossen, die alles Licht davon abhielt, und bis zum folgenden Tag aufbewahrt. An diesem wurde sie nebst der Kapsel auf Magnetismus geprüft, ohne jedoch dem Lichte den mindesten Zutritt zum Stahl zu gestatten, und ganz unmagnetisch befunden. Hierauf wurde die Kapsel geöffnet und die Nadel herausgenommen. Dabei ward sie ein wenig gebogen, und das mag die Ursache seyn, dass das polirte Ende, wiewohl sehr schwache, Spuren eines Südpoles zeigte. Als diese Nadel eine Stunde auf einem von der Sonne beschienenen Tische gelegen war, zeigte sie gar keinen Magnetismus mehr, als man sie aber etwa 3 Minuten an dem polirten Ende mittelst einer Sammellinse von 2½ Z. Oeffnung beleuchtete, wurde dieses Ende ein sehr starker

Nordpol, das andere ein nicht minder starker Südpol.

15.

Aus diesen Versuchen glaube ich mit ziemlicher Sicherheit den Schluss ziehen zu können, dass jede Ungleichheit der Beleuchtung der verschiedenen Theile einer Stahlnadel durch unzerlegtes Sonnenlicht in derselben Magnetismus erzeuge, und dass der das Licht stärker reflectirende Theil ein Nordpol werde. Daraus erklären sich auch viele Erscheinungen, die man sonst nur auf eine unbestimmte Weise zu erklären vermochte. So z. B. ist bekannt, dass die natürlichen Magnete meistens nur zu Tage vorkommen. Man hat dieses zwar von jeher der Einwirkung des Lichtes zugeschrieben, aber aus den vorhergehenden Versuchen ersieht man, dass die vorzüglichste Ursache des Magnetischwerdens in der Ungleichheit der Beleuchtung liege, die bei einem Körper, der auf der Erde aufliegt, nothwendig Statt finden muss.

Eine andere Erscheinung, die ich eher kennen lernte, als das gerade aufgestellte Gesetz, und die mich bald zu einem unrichtigen Schlusse verleitet hätte, war die, dass eine Nadel aus Stahl, die man an einem Ende blau, oder vielmehr violett anlaufen und dann in einem lichten Orte liegen lässt, schon nach wenigen Minuten am blauen Ende einen Südpol, am anderen einen Nordpol bekommt. Ich glaubte anfänglich hierin ein allgemeines Gesetz zu erblicken, um so mehr, da ich an einem Tage 16 Stahlnadeln ohne Ausnahme auf diese Weise ziemlich starken Magnetismus ertheilen konnte; allein weil es

mir an einigen der folgenden Tage durchaus nicht gelingen wollte, durch dasselbe Verfahren irgend eine magnetische Kraft hervorzurufen, so wurde ich gezwungen, die Versuche abzuändern, und der Leser weiss, zu welchem Gesetze sie führten. Diesem gemäss liegt die Ursache des Magnetischwerdens einer blau angelaufenen Nadel darin, dass das blaue Ende nicht so viel Lichtstrahlen reflectirte, als das andere, und dass das Misslingen mancher Versuche in einer zu geringen Ungleichheit der beiden Endtheile seinen Grund habe.

Es ist bekannt, dass man zu Carlsbad in Böhmen Stricknadeln verfertiget, welche mit blauen in Gestalt eines breiten Schraubenganges um den Cylinder herumlaufenden Stellen versehen sind. Nach dem Vorausgegangenen müsste eine jede Nadel dieser Art mit mehreren magnetischen Polen versehen seyn, wenn sie dem Lichte ausgesetzt war. Ich konnte leider nur drei Stücke bekommen, wovon nur eines ganz ungebraucht war, und dieses hatte wirklich an mehreren blauen Stellen Süd-, an den hellen aber Nordpole. Die zwei anderen zeigten nur an den zwei Extremitäten magnetische Pole; es waren aber auch die blauen Stellen von den lichten kaum mehr zu unterscheiden.

16.

Man kann das Magnetischwerden der angelaufenen Stahlnadeln nicht der Wirkung der beim Anlaufen Statt findenden Temperaturerhöhung zuschreiben, denn es wurde keine meiner Stahlnadeln magnetisch, die in dünnes Rollenmessing (Rauschgold)

eingeschlossen, und mit demselben bis zum Blauanlaufen erhitzt, und hierauf, ohne die Messingdecke wegzunehmen, dem Lichte ausgesetzt war. Ja die genannten Carlsbader Stecknadeln werden nicht durch Wärme blau gemacht, und befolgen doch dasselbe Gesetz.

17.

Um die Resultate meiner Versuche mit aller Treue anzugeben, muss ich noch bemerken, dass ich einigemal das gelb angelaufene Ende einer Stahlnadel, mit einem Nordpol versehen, bemerkte, ein Phänomen, das sich nicht wohl unter das vorher angeführte Gesetz bringen lässt. Allein dieses ist die einzige Anomalie, die mir aufstiess, welche aber bei der grossen Anzahl von Versuchen, die ich anstellte, so selten vorkam, dass auf zwanzig Fälle, die sich nach dem genannten Gesetze richteten, kaum einer der anomalen vorkam. Vielleicht führen weiter fortgesetzte Versuche zu einem noch allgemeineren Gesetze, welches auch diesen Fall in sich enthält. Immer werden aber solche Versuche wichtige Anwendungen gestatten, und dem Physiker vorzüglich die Mittel an die Hand geben, die Magnetnadeln gegen die schwächende Einwirkung der Wärme zu sichern, und eine Gleichförmigkeit in der Kraft zu erhalten. Aus den bis jetzt angestellten Versuchen kann man schon abnehmen, dass es zweckmässig sey, die Nordhälfte einer Magnetnadel hell zu poliren, und die Südhälfte dunkel zu lassen.

II. Ueber eine Eigenschaft des Lichtes, die sich beim Anblick kleiner leuchtender Puncte mittelst eines Fernrohres zeigt, von Professor Amici.

(Edinb. Journ. of science. Nr. 8. p. 306.)

Die Eigenschaft des Lichtes, von welcher hier die Rede ist, setzt uns in den Stand, die Scheiben der Jupiters Trabanten, die einen merklichen Durchmesser haben, von denen der Fixsterne, deren Durchmesser für unsere Augen unmerklich ist, zu unterscheiden.

Als ich diese Sterne mit meinen Telescopen beobachtete, an welchen ein Micrometer aus einem getheilten Objectivglas angebracht war, und die Vergrösserung so weit trieb, dass sie hinreichte, obigen Unterschied erkennbar zu machen, und ich die beiden Bilder durch Verschieben der Halblinsen von einander trennte; so bemerkte ich, dass die leuchtenden Scheiben verlängert, und in ovaler Form erschienen. Der kleinere Durchmesser der so gebildeten Ellipse ist dem der primitiven Scheibe gleich.

Diese Verlängerung liegt, vorausgesetzt, dass das Telescop wohl centrirt ist, in einer auf dem Durchschnitt der Micrometerlinse senkrechten Richtung; sie findet aber nur bei Fixsternen Statt, deren Durchmesser dem Auge unmerklich ist, und wenn die Vergrösserung zwischen dem 100 und 1000 fachen liegt.

Objecte von bemerkbarem Durchmesser, wie Planeten, sind dieser Lichtausdehnung, die ihre Gestalt

ändert, nicht unterworfen, wenigstens war ich nicht im Stande, sie zu bemerken. Ich habe verschiedene Male bemerkt, dass die Scheiben der Jupiters Trabanten, wiewohl sie kleiner erscheinen, als ein Fixstern, vollkommen kreisrund bleiben, und wohl begränzte Umrisse haben, selbst wenn ihr Bild verdoppelt erscheint. Dieses verschafft uns ein leichtes Criterium, wodurch man eine wirkliche Scheibe von einer scheinbaren, und mithin auch auf den ersten Blick einen neuen Planeten von einem Fixsterne unterscheidet. Denn hat der Planet nicht eine ausserordentlich kleine Scheibe, so behält diese ihre Gestalt bei, wenn man beide Linsen des Micrometers von einander trennt, während sich das Bild verlängert, wenn es einem Fixsterne angehört. *)

Bei der Untersuchung der Ursache dieses Phänomens überzeugte ich mich, dass die Verlängerung des Bildes nicht von den zwei Halblinsen abhängt. Wird die halbe Oeffnung des Spiegels eines Newton'schen Telescopes mittelst eines halbkreisförmigen Schirmes verdeckt, in welchem Falle man ein Bild erhält, wie durch eine halbe Linse, so bemerkt

*) W. Herschel hat in den Philos. transact. für das Jahr 1805 einige Experimente bekannt gemacht, um die Gränzen der Sichtbarkeit kleiner Objecte mittelst der Telescope auszumitteln. Er fand, dass die vom mittleren Theil des grossen Spiegels reflectirten Strahlen die falsche Scheibe zu vergrössern suchen, während die vom Umfange desselben reflectirten sie zu vermindern streben. Die verschiedene Wirkung der innern und äussern Strahlen, die von einem Spiegel von 10 Fuss Brennweite reflectirt werden, gibt ein Criterium, zur Unterscheidung einer falschen Scheibe von einer wahren, vorausgesetzt, dass ihr Durchmesser ½ Secunde übertrifft.

man dieselbe Erscheinung. Wenn man den Schirm rund herum dreht, so, dass immer der halbe Spiegel bedeckt bleibt, so hat die Verlängerung des Bildes eines Sternes immer nach einer Richtung Statt, die auf der Linie senkrecht ist, welche die offene Hälfte des Spiegels von der bedeckten trennt.

Man kann sich leicht überzeugen, dass diese Wirkung nicht von der Abweichung des Lichtes im Spiegel abhängt, weil sie da nach der Richtung des Durchmessers des halbkreisförmigen Schirms und nach dem Schnitt der Halblinse erfolgen müsste.

Um gewiss zu werden, dass die Verlängerung des Bildes nicht von der Aberration wegen der Kugelgestalt herrühre, stellte ich an das Ende eines Spiegel-Fernrohrs eine rechteckige Oeffnung, wovon eine Seite dem Vierfachen der anderen glich und brachte sie symmetrisch um die Axe des Tubus an. Wäre die Abweichung merklich, so hätte sie sich durch Dilatation der Scheiben des Sternes nach der Richtung der grösseren Seite des Rechteckes zeigen müssen. Dieses fand aber nicht Statt. Das Bild des Sternes erschien mit zwei langen leuchtenden Schweifen, die immer senkrecht auf der grösseren Seite des Rechteckes blieben, wenn man den Schirm in die Runde drehte.

Es scheint mir daher dieses Phänomen von einer Beugung des Lichtes an den Seiten der Blendung herzukommen. Dieses wird durch ein anderes Factum, das ich beim Gebrauch der Newton'schen Fernröhre kennen lernte, bestätiget. Richtet man ein solches Telescop gegen einen Stern, und rückt das Ocularglas näher an den Spiegel, als die Deutlichkeit des

Sehens fordert, so bemerkt man am Rande der leuchtenden Scheibe, welche die Gestalt des Spiegels hat, einen sehr schmalen hell leuchtenden Streifen und einen, der selbst den Schatten des kleinen Spiegels und des Armes, welcher ihn trägt, begrenzt. Dieselbe Erscheinung findet auch Statt, wenn man das Ocularglas über die Gränze des deutlichen Sehens herauszieht. Ich kann dieses Phänomen keiner andern Ursache zuschreiben, als der Beugung des Lichts am Rande des kleinen Spiegels und seines Trägers und am Rande des grössern Spiegels.

Wenn man das Entstehen des Bildes eines Sternes aufmerksam untersucht, während man das Ocularglas vom Punct des undeutlichen auf den des deutlichen Sehens bringt, so wird man sehen, dass die falsche Scheibe des Sternes grösstentheils, meistens ganz von den eben erwähnten leuchtenden Streifen ausgeht. Wenn man kein Mittel findet, diesem Uebel abzuhelfen, so setzt dieses der Vergrösserung durch Telescope ein Ziel, die man sonst ins Unbegränzte treiben könnte, wenn man die Spiegel so zu machen im Stande wäre, dass ihr Bild an Deutlichkeit dem Gegenstande gleich käme.

Phänomene, welche den hier beschriebenen ähnlich sind, treten auch an achromatischen Telescopen ein; bei diesen ist die Erscheinung solcher Scheiben noch merkwürdiger. Das Bild eines leuchtenden Punctes ist da mit einer Reihe concentrischer Ringe umgeben, die man leicht entdeckt, wenn man das Ocularglas abwechselnd über die Entfernung des deutlichen Sehens hinaus oder hinein schiebt. Die Ursache scheint in beiderlei Telescopen dieselbe zu

seyn, nur ist in achromatischen Instrumenten eine gewisse Einrichtung der Erzeugung solcher Strahlen besonders günstig. Die Erfahrung lehrte mich Doppelobjective so machen, dass ich einen Ring, oder eine grössere Anzahl derselben erzeugen kann, wenn ich das Ocularglas über den Punct des deutlichen Sehens hinausrücke.

III. Ueber die ungleiche Vertheilung der Wärme in einer thätigen Volta'schen Säule von I. Murray.

(Edinb. philos. joun. Nr. 27. p. 57 etc.)

Murray glaubt durch folgende Versuche über einige bis jetzt unerklärbare Erscheinungen, bei galvanischen Wirkungen, besonders über die von Seebeks, Dessaigne, Moll, von Beek etc. hervorgebrachten thermo-electrischen Phänomene Licht zu verbreiten, und auch zu einer naturgemässeren Theorie der Gewitter den Weg zu bahnen.

Er nahm 4 Porcellantröge mit Platten, die nach Wollastons Angabe eingerichtet waren, jeder Trog hatte 10 Zellen, und jede Platte 4 Q. Zoll Oberfläche. Jeder Trog enthielt $1\frac{1}{2}$ Unzen Salpetersäure und im übrigen Wasser. Der Apparat war im Stande, ein 6 Zoll langes Stück Platindraht, der $\frac{1}{80}$ Z. im Durchmesser hielt, glühend zu machen.

1. Versuch. Die Temperatur der Luft war 66° F., die des Wassers in den Zellen vor dem Versuche 64° F.

Während der galvanischen Wirkung stieg die Temperatur in

der 1. Zelle (des ersten Troges der den Zinkpol enthielt) auf . 99°F.	Differenz zwischen der grössten und kleinsten Temperatur 13° F.
2. — — 102 —	
3. — — 104 —	
4. — — 106 —	
5. — — 108 —	
6. — — 110 —	
7. — — 111 —	
8. — — 112 —	
9. — — 110 —	
10. — — 108 —	

in der 1. Zelle des zweiten Troges auf 99°F.	Differenz zwischen der grössten und kleinsten Temperatur 11° F.
2. — — 100 —	
3. — — 102 —	
4. — — 102 —	
5. — — 102 —	
6. — — 99 —	
7. — — 97 —	
8. — — 95 —	
9. — — 93 —	
10. — — 91 —	

in der 1. Zelle des dritten Troges auf 101° F.	Differenz zwischen der grössten und kleinsten Temperatur 7° F.
2. — — 104 —	
3. — — 106 —	
4. — — 108 —	
5. — — 108 —	
6. — — 108 —	
7. — — 106 —	
8. — — 105 —	
9. — — 103 —	
10. — — 101 —	

in der 1. Zelle des vierten Troges (der den Kupferpol enthielt) auf 100° F.		Differenz zwischen der grössten und kleinsten Temperatur 6° F.
2. — — 102 —		
3. — — 103 —		
4. — — 104 —		
5. — — 103 —		
6. — — 101 —		
7. — — 100 —		
8. — — 100 —		
9. — — 99 —		
10. — — 96 —		

Wiewohl bei diesem Versuche das Zink stark angriffen wurde, und daher die Resultate etwas zweideutig wurden, so konnte man doch daraus ersehen, dass die Temperatur vom positiven Pol zum negativen Gradweise abnimmt. In jedem Tage zeigte sich das Maximum der Temperatur in den mittleren Zellen, nahm aber gegen den negativen Pol mehr ab, als gegen den positiven. Diese Thatsachen beweisen, dass mit den galvanischen Phänomenen auch eine ungleiche Vertheilung der Wärme in Verbindung steht.

Zu folgendem Versuche wurden die Platten aufgefrischt, und die Säure von derselben Stärke genommen wie vorhin. Die Temperatur des Wassers war 62° F. Die Batterie machte einen 14 bis 15 Z. langen Platindraht von $\frac{1}{100}$ Z. im Durchmesser weiss glühend. Die Temperatur der Flüssigkeit in den einzelnen Zellen, die gemessen wurden, bevor die Platten herausgenommen waren, und wenn die Thätigkeit der Säule darauf beschränkt war, einen wenige Zoll langen Draht glühend zu machen, war wie folgt:

Erster Trog.			Zweiter Trog.		
Kupfer-ende.	Letzte Z.	101° F.	Letzte	Zelle	125° F.
	Mittlere —	106 —	Mittlere	—	140 —
	Erste —	112 —	Erste	—	135 —

Dritter Trog.			Vierter Trog.		
Letzte	Zelle	138° F.	Letzte	Zelle	136° F.
Mittlere	—	141 —	Mittlere	—	142 —
Erste	—	138 —	Erste	—	142 — (Zinkende)

Hieraus sieht man, dass das Minimum der Temperatur am Kupferende, das Maximum am Zinkende Statt findet.

In dreien der genannten Tröge war die höchste Temperatur in der Mitte.

Sobald die Platten aus der Flüssigkeit genommen waren, zeigten sich in ihr folgende Temperaturen:

	1. Trog.	2. Trog.	3. Trog.		4. Trog.
	1. Z. 101° F.	1. Z. 123° F.	1. Z. 128° F		1. Z 128° F.
Kupferende.	2. — 106 —	2. — 125 —	2. — 129 —	Zinkende	2. — 129 —
	3. — 109 —	3. — 127 —	3. — 130 —		3. — 131 —
	4. — 110 —	4. — 129 —	4. — 131 —		4. — 133 —
	5. — 111 —	5. — 131 —	5. — 132 —		5. — 134 —
	6. — 112 —	6. — 133 —	6. — 133 —		6. — 134 —
	7. — 112 —	7. — 134 —	7. — 133 —		7. — 133 —
	8. — 113 —	8. — 133 —	8. — 131 —		8. — 133 —
	9. — 113 —	9 — 131 —	9. — 130 —		9. — 132 —
	10. — 110 —	10. — 129 —	10. — 129 —		10. — 132 —

Hier ist die Zunahme der Temperatur vom Kupferende zum Zinkende sehr gleichförmig, auch fällt wieder in jedem einzelnen Troge das Maximum in die Mitte. Zwischen der letzten Zelle am Kupferpol und der am Zinkpol findet ein Unterschied von 132° — 101° = 31° F. Statt.

Beim folgenden Versuche war die Lufttemperatur 63°, die Temperatur der in den Zellen enthaltenen, verdünnten Säure 64°,5 F. Sobald die Platten eingetaucht waren, wurden folgende Temperaturen beobachtet.

Zinkende				Kupferende
1. Trog	1. Z. 69°	Mittlere Z. 66°	Letzte Z. 67°
2. —	— — 70	— — 68	— — 75
3. —	— — 80	— — 75	— — 75
4. —	— — 94	— — 86	— — 84

Hieraus ergibt sich, dass vor dem Eintritte der vollen Wirkung der Batterie das Kupferende die höchste, das Zinkende die niedrigste Temperatur hat.

Als die Säure schon schwach wirkte, fand man vor der Wegnahme der Platten folgende Temperaturen:

Zinkende			Kupferende
1. Trog.	1. Z. 126°	Mittlere Z. 125°	Letzte Z. 124°
2. —	— — 126	— — 130	— — 126
3. —	— — 124	— — 128	— — 130
4. —	— — 124	— — 122	— — 120

Hier nimmt wieder die Temperatur vom Kupferende zum Zinkende gleichförmig zu.

Nach Wegnahme der Platten fanden folgende Temperaturen Statt:

	1. Trog.	2. Trog.	3. Trog.	4. Trog.	
	1. Z. 122° F.	1. Z. 122° F.	1. Z. 121° F.	1. Z. 121° F.	
Zinkende	2. — 124 —	2. — 124 —	2. — 122 —	2. — 122 —	Kupferende
	3. — 126 —	3. — 125 —	3. — 124 —	3. — 122 —	
	4. — 126 —	4. — 126 —	4. — 125 —	4. — 122 —	
	5. — 126 —	5. — 126 —	5. — 125 —	5. — 121 —	
	6. — 125 —	6. — 128 —	6. — 125 —	6. — 119 —	
	7. — 124 —	7. — 127 —	7. — 125 —	7. — 116 —	
	8. — 123 —	8. — 126 —	8. — 125 —	8. — 116 —	
	9. — 120 —	9. — 124 —	9. — 129 —	9. — 116 —	
	10. — 120 —	10. — 122 —	10. — 126 —	10. — 116 —	

Diese Thatsachen scheinen folgende Fragen an die Hand zu geben: Modificirt die erregte Electricität diese Vertheilung der Wärme, oder bringt sie die chemische Einwirkung der Säure auf die Metalle von verschiedener Leitungsfähigkeit herbei, und ist die Electricität die Folge dieser ungleichen Vertheilung?

Es mag nun die Electricität aus einer ungleichen Vertheilung der Wärme, oder diese Vertheilung aus der Electricität hervorgehen, so ist doch die Electricität zur Ausgleichung dieser Ungleichheit bestimmt, und daher hat ein Gewitter das Gleichgewicht der Wärme aufzuheben nnd herzustellen. Zur Unterstützung dieses Schlusses führt Murray eine von ihm auf einer Reise von Basel nach Paris bemerkte Temperaturänderung an. Am 10. September zeigte ihm um 6¼ Uhr Nachmitt. das Thermometer 79° F., und Wolken am Horizont verkündeten ein fernes Gewitter. In 10 Minuten stieg das Thermometer auf 84°,5, und nach einer Viertelstunde auf 74°; da bemerkte er schon in der Ferne Blitze. Hierauf stieg die Temperatur auf 90°, fiel aber nach 7 Uhr auf 73°. Nach diesem stieg sie auf 78°.

IV. Siedhitze oder Salzauflösungen von Griffiths.

(Annales de l'induct. nat. et étrang. Nr. 75 p. 298.)

Griffiths unternahm eine Reihe von Versuchen, um die Siedhitze gesättigter Salzauflösungen und die Menge eines Salzes, die bei dieser Temperatur aufgelöst ist, zu bestimmen. Er wählte dazu

gewogen, das Wasser durch Verdünstung vertrieben, und die Menge des rückständigen Salzes bestimmt. Es scheint demnach, dass die auflöslichsten Salze in der Lösung in der grössten Menge vorhanden seyn, und die höchste Siedhitze darbieten müssen, allein mehrere einzelne Fälle machen davon eine Ausnahme, besonders schwefelsaure Soda, wovon in der Auflösung nur 51.5 pCnt. enthalten sind, und die Siedhitze des reinen Wassers nur um einen Grad erhöhen. *)

Die Temperaturerhöhung scheint weder von der Menge des Salzes, noch von dessen Auflöslichkeit abzuhängen. Weinsteinsaures Kali, das sehr leicht zerfliesst (68 Th. in 100 Th. der Auflösung) kocht bei 234°, während salzsaures Ammonium, auf welches die Luft keine Wirkung ausübt und wovon 100 Th. der Auflösuug nur 50 Th. Salz enthalten, bei 233° siedet. Eine Auflösung von 90 Th. Steinsalz kocht bei 240°, die der essigsauren Soda, welche nur 60 Th. enthält, bei 256°; endlich kocht die Auflösung des blausauren Quecksilbers und des doppelweinstein sauren Kali bei derselben Temperatur, wo doch das eine 35 p. C., das andere nur 5 pCnt. trockenen Salzes enthält.

Von folgenden Auflösungen konnte Griffith die Siedhitze nur beiläufig bestimmen, weil sie sehr schwer gesättiget zu erhalten sind. Seine Soda kochte bei 420°, und griff die Thermometerkugel an,

*) Beim Versuche wurden die Krystalle dieses Salzes durch die Wärme geschmolzen, und kochten in ihrem eigenen Krystallisationswasser.

salpetersaures Ammonium bei 360°, salpetersaures Kupfer bei 344°, kaustisches Kali bei 316°, Sauerkleesäure, welche in der Hitze anschwoll und sich sublimirte, bei 250°.

Als er eine Auflösung von kohlensaurem Ammoniak der Hitze aussetzte, schien sie bei 180° zu kochen, vermehrte er die Temperatur, so verdünstete das Salz, und verschwand gänzlich, als das Wasser seinen Siedpunct erlangt hatte.

V. Ueber die negative Electricität der Regenschauer von I. Foggo.

(Journ. of Science. Nr. VII. p. 124.)

Man sieht gewöhnlich die plötzlichen und häufigen Abscheidungen des Wassers aus der Luft als Wirkungen der Electricität an. Hagelschauer ist immer mit Spuren von Electricität verbunden, die oft zu einer Intensität steigt, dass sie Donner und Blitz erzeugt. Bei jedem Regen lassen sich grössere oder geringere Anzeigen von Electricität bemerken, jedoch wird bei einem weit um sich greifenden Landregen das Electrometer selten mehr afficirt, als es durch die blosse, in der Luft vorhandene Feuchtigkeit bewirkt werden kann. Die Regen, bei denen der Einfluss dieses Fluidums entschieden ist, haben einen sowohl vom Landregen als vom heftigen, bei Sturmwetter vorkommenden Schauer, ganz verschiedenen Charakter. Jene erstrecken sich nicht weit, dauern kurze Zeit, und der Wasserniederschlag ist besonders anfangs sehr heftig. Geht ihnen trockenes und

kaltes Wetter voraus, so zeiget sich ihre Wirkung vorzüglich dadurch, dass die Vegetation schnell eine Frische und Fülle erreicht, die durch künstliches Bewässern oder durch einen gewöhnlichen Regen nicht erreicht wird. Sie unterscheiden sich auch von anderen durch die Regelmässigkeit, mit welcher die Beschaffenheit der Electricität sich ändert. Wenn bei schlechtem Wetter die Luftelectricität negativ ist, so erfolget der Wechsel derselben mit der positiven im Allgemeinen so schnell, dass es schwer hält, ihn anzumerken, und zwischen diesem Wechsel findet oft einige Zeit gar keine electrische Spannung Statt. Bringt man ein Electrometer an einer leitenden Stange an, während sich eine electrische Regen- oder Hagelwolke nähert, so bemerkt man folgende Erscheinungen: So lange die Wolke in einiger Entfernung von der Stange ist, hat die Luft gewöhnlich positive Electricität; steht einmal der vorangehende Theil der Wolke über dem Leiter, so verliert sich die Electricität, und wird dann gar negativ. Dieser Zustand dauert nur eine kurze Weile, geht in den positiv-electrischen über, welcher anhält, bis die Wolke vorüber gegangen ist, wo wieder — E hervortritt, die selbst durch die natürliche positive E der Atmosphäre verdrängt wird.

Howard in London scheint zuerst bemerkt zu haben, dass die Electricität im Umfange einer regnenden Wolke (nimbus) negativ, in ihrem Mittelpuncte hingegen positiv ist. Dieser erfahrne Meteorologe beobachtete auch, dass die negative Electricität von unten hinauf, die positive aber von oben herab komme.

Ich wollte mich im Jahre 1823 von der Richtig-

keit dieser Meinung überzeugen, weil ich sie für geeignet hielt, einige electrische Phänomene zu erklären, die noch völlig unerklärbar sind. Ich bereitete mir zu diesem Zwecke einen Apparat, welcher dem von Bennet angegebenen ähnlich ist, und mit einem Goldplatt-Electrometer in Verbindung steht. Am 12. März 1824 erhob sich ein lebhafter Wind aus NW. mit häufigen Regenwolken. Um 3 Uhr Nachmittags ging eine dichte grosse Wolke über mein Zenith, und liess einige Hagelkörner fallen. Der Leiter ward mit einer rauchenden Lunte versehen, und aus einem gegen Süden gelegenen Fenster aufgerichtet. Während der Schauer nachliess, war die Electricität immer positiv, und machte die Plättchen des Electrometers stark divergirend. Es war auch wirklich die electrische Spannung der Luft so gross, dass das vom Leiter abgesonderte Electrometer durch geringes Reiben des Metalldeckels mit Seide völlig geladen war, und die Plättchen durch Reiben der Aussenseite des Glases mit weichem Leder um 40° divergirend gemacht wurden. Während des Regengusses, oder wenn die Wolken über mir standen, ohne dass ein Niederschlag Statt fand, war die Luftelectricität unveränderlich positiv, und so stark, dass ich manchmal mit den Fingern Funken aus dem Leitungsdraht gewinnen konnte; auch war ich im Stande, die Electricität nach Belieben durch Anfassen des Schaftes des Leitungsdrahtes vom Electrometer abzuhalten, zum Beweise, dass sie von den Wolken oder aus der Atmosphäre kam. Wenn aber der Rand der Wolken über dem Electrometer stand, zeigte sich negative Electricität, und zwar eben so stark, wie die positive;

jedoch konnte ich diese nicht wie die vorige durch Anfassen des Drahtes oder durch Berührung mit einer Metallspitze ableiten. Sie kam also nicht wie jene von den Wolken, sondern war durch die Erde den Wolken ertheilt. Brachte man eine Stahlspitze in die Nähe des Instrumentes, so nahm die Divergenz der Plättchen so sehr zu, dass sie dadurch sogar gefährdet wurden, und man hörte rasche Funken zwischen dem Electrometer und der Spitze wechseln, während man starke Stösse fühlte, wenn man die Finger an den Metalldeckel brachte.

Bei Versuchen über atmosphärische Electricität fand ich die Anwendung des Instrumentes meistens sehr zweckmässig, welches Fig. 1 darstellt, und aus einer kleinen Kugel besteht, die an feinem Silberdraht hängt, welcher selbst mittelst Siegellack an dem Deckel der ganzen Vorrichtung befestiget ist. Dieser Deckel ist aus Holz gedrechselt und durch ihn gehen zwei Glasröhren AA, die $\frac{1}{8}$ Zoll im Durchmesser haben, inwendig mit Siegelwachs überzogen, und am unteren Ende mit einem metallenen Knopf versehen sind. An eine dieser Röhren reicht die Schnur vom Leitungsdraht, um diesen mit dem unteren Knopfe in leitende Verbindung zu setzen; eine ähnliche Schnur verbindet den Knopf der zweiten Röhre mit der Erde. Letztere ist über 2 Klafter lang, und bis auf das Ende mit geöhlter Seide überzogen. Wird dieses Instrument mit dem Leiter verbunden, dieser aufgerichtet, während die andere Schnur mit der Erde in Verbindung bleibt, so wird die kleine Kugel vom Knopfe an der entsprechenden Röhre angezogen. Sobald sie eine electrische Ladung bekommen hat, wird sie

abgestossen, erreicht den anderen Knopf und schwingt zwischen diesen beiden so lange, als der Conductor Electricität erhält. Da man die Isolirung der kleinen Kugel leicht herstellt, so ist dieses Electrometer empfindlicher, als eines mit zwei kleinen Kügelchen oder mit Goldplättchen.

VI. Bericht über den merkwürdigen Gang einer Pendeluhr von A. Baumgartner.

Herr Kohn, einer meiner diessjährigen Zuhörer, der die Uhrmacherkunst ordentlich erlernt hatte, verfertigte sich eine astronomische Pendeluhr, und setzte die Pendelstange aus vier neben einander befindlichen gläsernen Röhren von der Dicke, wie man sie zur Construction der Barometer braucht, zusammen, damit die Wärme auf den Gang der Uhr einen möglichst kleinen Einfluss haben sollte. Er fand auch wirklich diesen Gang sehr regelmässig, so lange sich das bleierne, in Messing gefasste Gewicht über oder unter der Linse des Pendels befand, die aus demselben Materiale verfertiget war; sobald aber das Gewicht der Linse gegenüber zu stehen kam, begann die Uhr gegen ihren sonstigen Gang stark zu retardiren und blieb endlich ganz stehen. Der Besitzer dieser Uhr glaubte sich überzeugt zu haben, dass dieses nicht von einem Aneinanderstossen der Linse und der Gewichte herrühre; wirklich sind beide von einander um 1 Zoll entfernt, das Gewicht konnte wegen seiner Grösse wohl durch zufällige Stösse, welche durch vorbeirollende Wägen er-

zeugt werden, nicht leicht in Schwingungen gerathen, auch erfolgte das Stillstehen bei Nacht, wo sich wenig regte, eben so gut, wie bei Tage, und unabhängig von jeder Witterung. Dieses Verhalten wurde durch 9 Monate beobachtet, ohne dass eine einzige Ausnahme Statt fand, wiewohl innerhalb dieser Zeit das Gewicht dem Pendel oft gegenüber zu stehen kam.

Als mir diese Thatsache bekannt wurde, vermuthete ich, es sey eine electrische Wirkung im Spiele, und rieth Herrn Kohn, die Isolirung der Linse mittelst eines Metallfadens aufzuheben. Als zu diesem Zwecke ein feiner Draht durch eine der vier Glasstangen gesteckt und so die leitende Verbindung zwischen der Linse und den übrigen Theilen der Uhr hergestellt ward, blieb sie zwar nicht mehr stehen, wenn das Gewicht der Linse gegenüber kam, aber sie blieb doch gegen ihren sonstigen Gang stark zurück. Ich glaubte nun wirklich den Grund obiger Erscheinung in eine electrische Spannung setzen zu müssen, wollte mich aber doch genauer von der Sache überzeugen, und prüfte daher die Linse, als sie wieder isolirt war, mittelst eines sehr empfindlichen Bohnenberger'schen Electrometers, erhielt aber nur schwache Spuren positiver Electricität. Das Gewicht fand ich gar nicht electrisch und doch blieb die Uhr wieder wie vorher stehen. Der Eigenthümer setzte die electroscopischen Versuche fort, und isolirte sowohl das Pendel als auch das Gewicht, indem er letzteres an seidene Fäden hing. Als Ergebniss seiner Versuche berichtete er mir, er habe bemerkt, dass in diesem Zustande der Isolirung des Pendels und

des Gewichtes die Retardation der Uhr gegen mittlere Zeit innerhalb 24 St. 55″ betrage, und dass sich das Pendel positiv electrisch zeige, das Gewicht hingegen gar keine electrische Spannung bemerken lasse. So wie das Gewicht dem Pendel gegenüber zu stehen kommt, verliert dieses die Electricität, das Gewicht zeigt + E, die Uhr retardirt stündlich um volle 2″ — 3″ und bleibt endlich ganz stehen.

Sollte wohl diese geringe electrische Einwirkung den Gang eines so kräftigen Pendels ganz hemmen können, oder liegt eine andere Ursache zum Grunde?

VII. Verbesserte und neue physikalische Instrumente und Methoden.

1.

Amici's Microscop, verbessert von Goring.

(Journal of Science and the arts Nr. 41 pag. 34).

J. Cuthbert, ein englischer Künstler, ward durch das Lob, welches man dem von Amici erfundenen catoptrischen Microscope in Gilberts Annalen und im 18 B. der Abhandlungen der italienischen Societät ertheilte, bewogen, ein solches Instrument zu construiren. Er gab aber dem Objectivspiegel eine Brennweite von 3 Z., bei einer Oeffnung von 1½ Z., während bei Amici diese Brennweite 2,6 Z., und die Oeffnung 1 Z. betrug, die Spiegel bekamen eine genaue Figur, und doch fand er die Wirkung des Instrumentes seiner Erwartung nicht gemäss. Goring lieh ihm eigene, sehr schwer deutlich zu

machende Objecte, beide konnten aber nicht zu Stande bringen, dass man eines derselben deutlich sah. Eben so ungenügende Resultate soll Dollond mit einem von ihm verfertigten Microscope erhalten haben, und doch glaubte man nicht zweifeln zu können, dass diese Instrumente genau nach Amici's Angabe ausgeführet seyen, ja es schien Cuthberts Einrichtung dieses Instrumentes sogar einigen Vorzug vor dem von Amici gewählten zu haben, weil der elliptische Spiegel mehr Oeffnung im Verhältniss zu seiner Brennweite hatte, um so mehr, da Goring in der Mitte des Gesichtfeldes eine neblige Stelle bemerket hat, die daher kommen soll, dass der kleine Plan-Spiegel zu viel vor dem elliptischen deckt und doch dieser gedeckte Theil nach Amici's Dimensionen mehr als die halbe Oeffnung, nach Cuthberts aber nur die Hälfte derselben beträgt.

Da nun Goring meinte, Amici habe die beste Eigenschaft seines Instrumentes der Möglichkeit einer besseren Beleuchtung der Objecte geopfert, indem er die Brennweite des elliptischen Spiegels so gross machte, und durch Versuche gefunden haben wollte, dass zusammengesetzte Microscope mit einem Objectivglase von recht kurzer Brennweite die beste Wirkung thäten, so rieth er Cuthbert, wo möglich, dem Metallspiegel nur eine Brennweite von $\frac{1}{2}$ Z. und eine Oeffnung von $\frac{1}{4}$ Z. zu geben, und so die Länge des Instrumentes auf 4 — 5 Z. zu reduciren, und entwarf ihm zugleich den Plan zur mechanischen Einrichtung des Ganzen. Cuthbert führte alles dieses aus und so entstand ein Instrument, von dem Goring meint, er und Cuthbert können als eigent-

lichen Urheber desselben (legitimate parents) angesehen werden, und welches in Fig. 2 abgebildet ist.

AB ist das Fussgestell, das sich von dem eines kleinen Telescops nicht unterscheidet, ausser dass es eine Zugröhre C hat, die unten aufgeschlitzt ist, und gestattet, dem Instrumente eine Höhe von 10—15 Z. zu geben. Die Charnier D lässt sich durch einen Stift befestigen, um den Körper des Instrumentes in horizontaler Lage zu erhalten. Der Körper selbst ist in die Fassung F, mittelst einer Schraube eingeklemmt, und kann davon weggenommen werden, damit man das Fussgestelle auch allenfalls für ein kleines Fernrohr brauchen könne. Der Körper GH ist $6\frac{3}{4}$ Z. lang, und lässt sich durch eine Zugröhre auf 9 Z. verlängern, in welcher das Ocularstück seinen Platz hat. Solcher Stücke hat das Instrument 4 oder 5. Die Brennweite des vorderen Oculars mit der geringsten Vergrösserung beträgt $\frac{3}{4}$ Z., die mit der grössten $\frac{1}{10}$ Z. Sie sind wie in astronomischen Fernröhren eingerichtet, bestehen aus 2 Plan-convex Linsen und sind achromatisch. Die Röhre I enthält die Metallspiegel und ist in K eingeschraubt.

Es sind davon 4 Einsätze vorhanden mit folgenden

Oeffnungen und	Brennweiten.
0.3 Z.	0.6 Z.
0.3 —	1.0 —
0.6 —	1.5 —
0.3 —	4 —

Cuthbert will noch einen elliptischen Spiegel von 0.3 Z. Brennweite und 0.2 Oeffnung machen. Alle diese Spiegel sind gegen Staub und Feuchtigkeit durch einen Deckel geschützt, den man aufschrauben

kann, wenn sie nicht in den Körper des Instrumentes eingesetzt sind; ein Röhrensegment e schliesst dann die Oeffnung, durch welche die Lichtstrahlen in das Instrument gelangen. Der Querdurchmesser des schief gegen die Axe des Rohres gestellten Spiegels übertrifft nicht ¼ vom Durchmesser des anderen, und verursachet daher nicht die mindeste Trübung im Gesichtsfelde. Die Stange LM hat 4 Z. Länge, ist fest an dem Hals des Instrumentes mittelst der Klemmschraube N angemacht; sie ist dreieckig, an der Rückseite gezähnt. Der Träger O ist wie bei den gewöhnlichen Microscopen eingerichtet, eine Convexlinse P lässt sich an die federnde geschlitzte Röhre Q aufstecken, und dient zur Beleuchtung undurchsichtiger und transparenter Körper, weil man sie unter und ober dem Träger anbringen kann. Der Spiegel R ist eben, an der Rückseite am besten mit Pariser Gips (plaster of Paris) überzogen, um das directe Sonnenlicht zu reflectiren; dieses gewährt für transparente Körper eine vortreffliche Beleuchtung. Ein Hohlspiegel verursacht stets einige Undeutlichkeit, wiewohl er die Lichtstärke vermehrt. Für undurchsichtige Objecte kann man statt des Spiegels R die Convexlinse S anwenden, indem man sie in dieselbe Fassung einsetzt, die Kappe T an die Oeffnung der Röhre schiebt, welche die Spiegel enthält, und den Körper des Instrumentes in der Fassung F so weit herumdreht, bis die Stange LM einer Lampe oder einer andern Lichtquelle zugewendet ist.

Im übrigen ist dieses Instrument den gewöhnlichen zusammengesetzten Microscopen so ähnlich, dass es keiner weiteren Beschreibung bedarf.

Fig. 3 stellt einen Beitrag von Cuthbert vor, wodurch das Instrument in ein einfaches Microscop verwandelt wird. Bei a wird es an den Körper des Microscopes statt des Metallspiegels angeschraubt, die Stange b schiebt sich in ein viereckiges Loch, hat in c ein Knie, um die Bewegung nach der Seite zu gestatten, und gegen das Ende die microscopische Linse.

Fig. 4 stellt eine andere Einrichtung von Cuthbert vor, durch welche er das catoptrische Microscop in ein dioptrisches verwandelt. a stellt ein Stück vom Körper dieses Instrumentes, b ein Stück der oben beschriebenen Stange vor; beide sind mit einander mittelst einer Doppelklemmzange verbunden, die an einem Ende c den Körper des Instrumentes, am anderen d die Stange b umfasst, und sie durch die Schrauben e und f fest hält. Die Zeichnung g stellt einen Durchschnitt des Objectivglases vor. Es besteht aus zwei plan-convex Linsen, die Brennweite der vorderen h verhält sich zu der der hinteren i wie 2:3, während ihre gegenseitige Entfernung 1 ist, die flachen Seiten derselben sind dem leuchtenden Körper zugewendet; k dient zur Regulirung der Oeffnung. Goring empfahl die Einrichtung des Objectivglases dem Künstler Cuthbert statt der gewöhnlichen Biconvex-Linse, weil sie bei einer gegebenen Brennweite und Oeffnuug nur den vierten Theil der Abweichung wegen der Kugelgestalt hat. In l zeigt sich dieser Theil, wie er am Körper des Instrumentes angebracht ist.

Wenn bei dieser Einrichtung des Microscopes der elliptische Spiegel mehr Oeffnung haben soll, als

30°, so fällt sein Brennpunct in die Röhre, welche ihn enthält, und der querstehende Planspiegel müsste zu nahe an ihn gestellt werden. Bringt man aber das Object zwischen zwei durchsichtige Plättchen bb (Fig. 5) in einen Ausschnitt der Röhre bei aa, so dass er sehr nahe an den Planspiegel c zu stehen kommt, so kann man dem Hohlspiegel d eine Oeffnung von 60° geben, ohne die des ersten c zu vermehren. Die Röhre, welche sie enthält, muss aber eine grosse Oeffnung haben, die dem kleinen Spiegel in e gegenüber steht, und eine andere Röhre muss sich darüber schieben lassen, die dem Lichte durch f den Eintritt gestattet.

2.

Ein neues Mittel, sehr intensives Licht zu erzeugen, von Drummond.

(Annals of philosophy, Juni, 1826. p. 451.)

Drummond hat zum Behufe der Feuersignale, die man bei der Vermessung von Irland anzuwenden gedachte, mehrere pyrotechnische Präparate versucht, die, in dem Brennpuncte eines parabolischen Spiegels angezündet, ein hinreichendes Licht geben sollten, und unter andern auch das Verbrennen des Phosphors in Sauerstoffgas dazu benützen wollen, allein er fand, dass das so erhaltene Licht schlecht begrenzt, und auch in anderer Hinsicht nicht wohl zweckmässig sey. Er untersuchte nun auch das Licht, welches Erden- und Metalloxyde von sich geben, wenn sie in eine vom Sauerstoffgas genährte Weingeistflamme kommen. Um einen Vergleich anstellen zu können, nahm er das Licht,

welches vom hellsten Theil der Flamme einer Argand'schen Lampe ausging, als Einheit an, nahm die verhältnissmässige Stärke mehrerer aus der Intensität des durch sie gebildeten Schattens ab, und fand, dass das Licht, welches Aetzkalk aussendet, bei obiger Behandlung durch 37, das von Zircon durch 31, und das von Magnesia durch 16, der Intensität nach, ausgedrückt werden müsse. Zinkoxyd gab weniger Licht, als Magnesia. Die beste Kalkgattung zu diesen Versuchen ist Kreidekalk (chalk lime), den man leicht zu kleinen mit einem Stiel versehenen Kügelchen formen, und deren Oberfläche man so regelmässig und genau machen kann, als es zur Erzeugung eines wohlbegrenzten, zu geodetischen Operationen erforderlichen Bildes nothwendig ist. Wenn der Versuch wohl geräth, so gibt solcher Kalk ein 83mal stärkeres Licht als eine Argand'sche Lampe. In dem Brennpuncte eines parabolischen Hohlspiegels erregt, blendet es selbst in einer Entfernung von 40 F. die Augen so sehr, dass man es nicht ansehen kann. L. Colby glaubt durch dieses Mittel den Meridian des Observatoriums am Calton Hill, zu Edinburg mit dem von Dublin mittelst der Zwischenstation Ben Lamond verbinden zu können, wiewohl eine Seite des Dreieckes über 90 Meilen (englische) misst. Drummond fand, dass ein Gemenge von Wasserstoff- und Chlorgas, welches diesem vom Kalk ausstrahlenden Lichte ausgesetzt wird, in Salzsäure verwandelt wird, und dass der violette Strahl, den man mittelst eines dreiseitigen Prismas daraus erhielt, eine merkliche Wirkung auf Hornsilber ausübt. Herschel untersuchte, wiewohl nur erst cursorisch, die Eigenschaften dieses Lichtes,

und fand, dass darin alle gewöhnlichen Strahlen enthalten, dass aber drei von ihnen ihrer Menge und Beschaffenheit wegen merkwürdig sind: nämlich der rothe, welcher zwischen dem rothen und orangefarbenen, aber näher am letzteren, im gewöhnlichen Farbenbilde vom Sonnenlichte liegt; ein gelber und ein grüner. Herschel führt an, dass das genannte Roth vom Kalk selbst herkomme, indem alle brennenden Körper, indem sie sich mit dieser Erde verbinden, ziegelrothes Licht von sich geben, das von dem carminrothen des Strontian ganz verschieden ist.

3.

Berzelius Verfahren, um Arsenik im Körper vergifteter Personen zu entdecken.

(Edinb. Journal of Science. Nr. VII. p. 131.)

Berzelius betrachtet die Reduction des Arseniks in den metallischen Zustand als den einzigen sicheren Beweis von der Anwesenheit desselben bei Vergifteten. Arsenik kann entweder als Arseniksäure in todten Körpern vorkommen, oder in den Eingeweiden aufgelöset enthalten seyn. Im ersten Falle ist er leicht zu entdecken. Man nehme zu diesem Zwecke ein über 3 Z. langes Stück einer Barometerröhre AB (Fig. 6), die an einem Ende zu einer engeren Röhre ausgezogen und verschlossen ist, gebe etwas von dem im Körper gefundenen Arsenik in diese Röhre, so dass es in den engeren Theil CB hinabfallen kann, gebe ein wenig Holzkohle darauf, nachdem sie von aller Feuchtigkeit dadurch befreit worden ist, dass man sie mit der Löthrohrflamme in Rothglühhitze gebracht hat.

Hierauf halte man die Röhre in eine Weingeistflamme, so dass B nicht von ihr getroffen wird, und verschiebe sie, sobald die Kohle roth geworden ist, damit der Arsenik von der Flamme getroffen wird. Dadurch wird er alsogleich verflüchtiget, reducirt und erscheint auf der anderen Seite der Flamme in metallischem Zustande. Bringt man die Flamme näher an das sublimirte Metall, so wird es in einen kleinen Raum des engen Theils der Röhre concentrirt und legt sich wie ein metallischer Ring an das Glas an, der polirtem Stahl ähnlich ist. Es ist nun noch übrig, durch den Geruch zu zeigen, dass das Sublimat Arsenik ist. Zu diesem Zwecke schneidet man die Röhre etwas über dem Sublimat mit einer Feile ab, erhitzt die Stelle, wo dieses sich befindet und hält sich mit der Nase in einer geringen Entfernung davon. Der Geruch wird den Arsenik bald verrathen. Wo man keinen festen Arsenik finden kann, muss man vom Inhalte des Magens und der Gedärme, so viel als möglich, sammeln, den Magen in Stücke schneiden, und diese seinem Inhalte beimengen. Alles wird dann in einer Lösung von Kalihydrat digerirt, hierauf Salzsäure in Ueberschuss zugegeben, und wenn die Flüssigkeit zu verdünnt erscheint, durch Verdünstung concentrirt. Leitet man nun einen Strom Schwefelwasserstoffgas durch, so wird der Arsenik als gelbes Sulphuret gefällt. Ist die Menge des Arseniks zu gering, so wird nur die Flüssigkeit gelb, ohne einen Niederschlag zu geben; lässt man sie verdunsten, so wird der Schwefelarsenik in dem Masse abgesetzt, als die Salzsäure an Concentration gewinnt. Man filtrirt den Niederschlag. Ist das übrige Sulphuret in zu geringer Menge da, als dass

man es vom Filtrum nehmen könnte, so gebe man einige Tropfen ätzenden Ammoniak zu, um es aufzulösen, leite die Flüssigkeit in ein Uhrglas und lasse sie verdunsten, wobei der Ammoniak sich verflüchtiget und den Schwefelarsenik zurücklässt.

Lässt sich dieser schwer sammeln, so gebe man in das Uhrglas ein wenig gepulvertes salpetersaures Kali, und mische mit dem Finger dieses Salz und das Sulphuret, damit es sich vom Glase los mache. Nun schmelze man in einer kleinen Phiole oder in einer Glasröhre, die an einem Ende verschlossen ist, ein wenig salpetersaures Kali mittelst einer Weingeistflamme, und gebe zu diesem, wenn es geschmolzen ist, etwas von der Mischung, die den Schwefelarsenik enthält. Er oxydirt sich mit Aufbrausen aber ohne Feuer und Detonation und ohne Verlust an Arsenik. Hierauf löse man dieses Salz in Wasser auf, gebe Kalk im Ueberschuss zu, und koche die Flüssigkeit. Dabei setzt sich der arseniksaure Kalk ab, und kann gesammelt werden. Wenn er trocken ist, mische man ihn mit Holzkohle, bringe ihn vor dem Löthrohre zum Rothglühen, und lasse eine kleine Quantität der Mischung in dem engen Theile obiger Röhre gelangen. Nun erhitze man den Theil der Röhre, welcher die Mischung enthält, stufenweise an der Flamme eines Löthrohres, um die Feuchtigkeit zu vertreiben; der Arsenik wird dann frei und in einiger Entfernung vom erhitzten Theil sublimirt. Ein Zusatz von verglaster Boraxsäure befördert die Zersetzung bei einer geringen Temperatur mächtig, allein sie enthält Wasser, und bringt in der geschmolzenen Masse ein Aufwallen hervor, wodurch sie in der Röhre aufsteigt, und ein Herausdrin-

gen der Dünste bewirkt, indem das Glas an der schwächeren Stelle durchbohrt wird.

Berzelius meinet, $\frac{1}{6}$ Gran Schwefelarsenik reiche zu drei Versuchen aus, aber er setzt hinzu, dass man Acht haben müsse, um nicht durch die Reagentien, besonders durch die Schwefel- und Salzsäure, Arsenik in die Mischung zu bringen. Erstere enthält ihn stets, wenn sie nicht aus vulcanischem Schwefel bereitet worden ist, und letztere bekommt ihn erst von der Schwefelsäure, die man zu ihrer Bereitung anwendet.

Wenn der Tod nicht durch Arsenik, sondern durch Arseniksäure verursacht worden ist, so muss man das Verfahren etwas abändern, weil das geschwefelte Wasserstoffgas die Arseniksäure zu leicht zersetzt. In diesem Falle muss man Schwefelwasserstoff-Ammoniak zusetzen, welches die Arseniksäure zu Schwefel-Arsenik reducirt, und dann diesen durch Salzsäure fällen.

4.
Hare's Chyometer.

(The Philos. magaz. and journ. April 1826.)

Den Lesern des zweiten Heftes dieser Zeitschrift ist bekannt, welche Verbesserung Hare in Pensylvanien an dem gewöhnlichen Eudiometer angebracht hat, indem er statt des gewöhnlichen Luftmasses einen hohlen Cylinder mit einem Kolben anbrachte, dessen Stange der Länge nach in 100 gleiche Theile getheilt ist, so dass man aus der Grösse des herausragenden Stückes der Kolbenstange die Capacität des

Cylinders vom offenen Ende bis zum Boden des Kolbens erkennen kann.

Eine solche Messröhre mit einem luftdicht anschliessenden Kolben und einer graduirten Kolbenstange braucht er auch, um das Verhältniss gewisser Wassermengen auszumitteln, die bei der Bestimmung des specifischen Gewichtes fester und tropfbar flüssiger Körper mittelst einer hydrostatischen Wage statt der gewöhnlichen Zuleggewichte angewendet werden sollen. Er nennt dieses Instrument Chyometer. Fig. 7 stellt es vor. Der grösseren Genauigkeit wegen befindet sich am Ende des Cylinders ein Einschnitt, an welchem ein Nonius angebracht ist, mittelst welchem jeder Grad der Kolbenstange in 10 gleiche Theile getheilt wird, so dass man $\frac{1}{1000}$ des innern Raumes messen kann.

Um das specifische Gewicht einer Flüssigkeit, welche das Material des Cylinders nicht angreift, zu bestimmen, nehme man zwei solche Chyometer, fülle eines derselben, indem man die Kolbenstange möglichst weit herauszieht, mit reinem Wasser, das andere mit der zu prüfenden Flüssigkeit, bringe alle 1000 Theile dieser Flüssigkeit auf eine Schale einer Wage und so viel Wasser auf die andere Schale, als zur Herstellung des Gleichgewichtes nöthig ist. Ersieht man z. B. aus der Scale am Kolben, dass man von letzterem 800 Theile gebraucht habe, so ist 0,800 das specifische Gewicht der Flüssigkeit, weil sich die specifischen Gewichte der Flüssigkeiten bei einerlei absolutem Gewichte verkehrt, wie ihre Volumnia verhalten.

Ist die abzuwägende Flüssigkeit von der Art, dass sie den Cylinder oder den Kolben des Chyometers an-

greift, so muss man ein anderes Verfahren wählen, um ihr specifisches Gewicht zu bestimmen. Man nimmt zu diesem Behufe einen Hilfskörper, z. B. einen Glastropfen, bringt ihn wie bei dem gewöhnlichen Verfahren an eine Wage und setzt ihn durch Gegengewichte ins Gleichgewicht. Hierauf taucht man ihn ganz in Wasser, und gibt mittelst des Chyometers auf die Schale, wo der Körpsr hängt, so viel Wasser, bis das vorige Gleichgewicht wieder hergestellt ist. Dann senkt man ihn in die zu prüfende Flüssigkeit und bringt das Gleichgewicht wieder durch Zugabe von Wasser hervor. Die letzte Wassermenge durch die erstere getheilt, gibt das specifische Gewicht der Flüssigkeit an. Ist die Theilung des Chyometers von der Art, dass man zur Einsenkung des Hilfskörpers in Wasser 1000 Theile Wasser braucht, so gibt die zweite Wassermenge das gesuchte specifische Gewicht ohne weitern an.

Will man mittelst des Chyometers das specifische Gewicht eines festen Körpers finden, so hänge man ihn unter die Schale einer Wage, und bringe in die Wagschale am entgegengesetzten Arme derselben so viel Wasser mittelst des Chyometers, bis das Gleichgewicht hergestellt ist. Hierauf setze man ein Gefäss mit Wasser unter den zu prüfenden Körper, tauche ihn darein, und stelle das Gleichgewicht wieder durch Wasser her, das man mittelst des Chyometers in die Wagschale ober dem abzuwägenden Körper gibt. Theilt man hierauf das Volumen des zuerst zugefüllten Wassers durch das des zuletzt beigegebenen, deren beide man aus dem Stande der Kolbenstange erkennt, so gibt der Quotient das gesuchte specifische Gewicht.

Es ist klar, dass sich dieses Verfahren von dem gewöhnlich angewendeten nur dadurch unterscheidet, dass man statt fester Gewichte Wasser anwendet.

Man kann auch das specifische Gewicht eines Minerals ohne alle Rechnung mittelst eines Chyometers finden, das eingerichtet ist, wie Fig. 8 zeigt. Dazu braucht man aber auch eine besondere Wage, die Fig. 9 darstellt.

Das Chyometer hat keine getheilte Kolbenstange, dafür aber zwei Weiser, deren einer am Ende des Cylinders befestiget ist, während sich der andere an der Kolbenstange verschieben lässt, aber auch mittelst einer Stellschraube eine unveränderliche Lage erhalten kann.

Der Balken der Wage hat auf einer Seite ein verschiebbares Gewicht W, um mit Körpern von verschiedenem Gewichte, die am anderen Arme angebracht werden, in ein Gleichgewicht gebracht werden zu können, der zweite Arm trägt an 2 Haken 2 Wasserbehälter, deren einer der Drehungsaxe fünfmal näher ist als der andere. Mittelst der Schraube S lässt sich der Balken immer so stellen, dass er mit dem Index I stets einerlei Richtung hat.

An das von der Axe des Wagebalkens entferntere Gefäss wird nun das Mineral angehängt, dessen specifisches Gewicht gesucht wird, und mittelst des beweglichen Gegenwichtes mit Beihülfe der Schraube S der Balken in die rechte Lage gebracht, dann ein Gefäss mit Wasser unter den Mineralkörper gestellt, derselbe darin getaucht, und aus dem Chyometer in das oberhalb befindliche Gefäss so viel Wasser gegeben, bis das Gleichgewicht neuerdings hergestellt ist. Da-

bei muss aber der Weiser B, welcher sich an der Kolbenstange verschieben lässt, mittelst der Stellschraube befestiget werden, damit man den Weg kennen lerne, welche der Kolben machen musste, um so viel Wasser herauszutreiben, als zur Einsenkung des Minerals nothwendig ist. Darauf entfernt man das Mineral von der Wage und mittelt aus, wie viele Wasserportionen von der Grösse der vorhin gegebenen zur Herstellung des Gleichgewichtes nothwendig sind. Diese Zahl um eine Einheit (d. i. um das Gewicht der vorhin zur Erzielung der Einsenkung zugegebenen Wassermasse) vermehrt, zeigt das gesuchte specifische Gewicht an, in so ferne es durch ganze Zahlen ausgedrückt werden kann. Die Bruchtheile kann man, wenn es nothwendig ist, dadurch bestimmen, dass man Wassermengen von der Grösse wie die vorhin angewandten Einheiten, in das zweite der Axe der Wage nähere Gefäss gibt; denn jede solche Wassermasse beträgt $\frac{1}{5}$ und kann zur ganzen Zahl addirt werden. Man theilt leicht den Abstand durch Augenmass in zwei gleiche Theile. Stellt man daher das Gefäss auf den Halbirungspunct, d. i. zehnmal näher an die Axe als das erstere, so erhält man für jedes Mass Wasser Zehnteltheile des specifischen Gewichtes.

Hare lehrt auch mittelst eines sogenannten Sectors das specifische eines Körpers bis auf kleine Bruchtheile zu finden, allein sein Verfahren ist so mühsam, dass jeder gewiss lieber die gewöhnliche Methode vorziehen wird, wenn es sich schon darum handelt, das specifische Gewicht bis auf mehrere Decimalstellen zu finden. (B)

5.

Eine einfache Methode gläserne Aräometer zu graduiren, von C. Moore.

(Annals of philosophy. April 1826.)

Man pflegt häufig gläserne Hydrometer von ungleichem Caliber durch Einsenken in Flüssigkeiten von verschiedenem specifischen Gewichte zu graduiren, aber man braucht dazu viele Flüssigkeiten, und diese ändern sich „während ihrer Anwendung durch Verdünstung.

Untersucht man das specifische Gewicht der Flüssigkeiten mittelst eines Gefässes von bekanntem Volumen, so vergleicht man eigentlich die Gewichte gleicher Volumina mit einander; bedient man sich aber dazu eines Hydrometers, so vergleicht man die Volumina von einerlei Gewicht; denn das Instrument verdrängt ein Volumen der Flüssigkeit, dessen Gewicht dem eigenen gleich kommt. Hieraus nun leitet man eine Methode ab, ein Hydrometer mittelst einer einzigen Flüssigkeit zu graduiren.

Als solche dienet am besten Wasser, dessen specifisches Gewicht als Einheit angenommen wird, weil man leicht berechnen kann, welches Wasservolumen ein eben so grosses specif. Gewicht hat, wie ein bestimmtes Volumen einer Flüssigkeit von gegebenem specifischen Gewichte oder mit anderen Worten, um wie viel man das Gewicht des Hydrometers ändern muss, damit es im Wasser von 60° F. eben so weit einsinke, wie in einer Flüssigkeit von gegebenem specifischen Gewichte.

Gibt man in das Hydrometer eine papierene fein abgetheilte beliebige Scale, hängt es an eine Wage, wie einen festen Körper, dessen specifisches Gewicht hydrostatisch bestimmt werden soll, und bringt es durch Gegengewichte ins Gleichgewicht, setzt dann ein Gefäss mit Wasser darunter, nimmt von der Wagschale Gewichte weg, so wird sich das Hydrometer ins Wasser eintauchen, und zur Herstellung des Gleichgewichtes eine Wassermasse verdrängen, die so viel wiegt, als die weggenommenen Gewichte betragen. Auf diese Weise findet man leicht den Punct, bis zu welchem die Einsenkung in einer gegebenen Flüssigkeit erfolgen muss, den man hierauf in einer besonderen Scale verzeichnen, und in das Instrument gehörig einsetzen kann.

Gesetzt, es handelte sich darum, ein gläsernes Hydrometer für Säuren und Salzauflösungen zu verfertigen, bei welchem daher der Einsenkungspunct in reinem Wasser den obersten Platz einnimmt, und es verdränge das Instrument, wenn es bis zu diesem Puncte in Wasser getaucht wird, x Gran Wasser: so findet man das Gewicht, welches das Instrument haben muss, damit es sich in reines Wasser eben so weit eintaucht, wie bei dem Gewichte x in eine Flüssigkeit vom specifischen Gewichte y, durch die Proportion

$$y : 1 = x : \frac{x}{y}.$$

Vermehrt man daher das Gegengewicht um $x - \frac{x}{y}$, so wird das Instrument bis zum erforderlichen Puncte auftauchen. Hat man so alle nöthigen

Puncte bestimmt, so braucht man sie nur auf eine neue Scale zu verzeichnen, und diese an den gehörigen Platz zu bringen.

Soll ein Hydrometer für Flüssigkeiten eingerichtet werden, die leichter sind als Wasser, so entspricht der unterste Punct der Scale dem reinen Wasser, und man kann durch Verminderung der Gegengewichte wie vorhin, die übrigen Theilpuncte derselben finden.

Diese Methode ist, im Grunde genommen, dieselbe, welche Brisson in seinem Dictionaire de Physique Art. Aréomètre angibt, und welche schon durch Gehlers Wörterbuch in Deutschland bekannt wurde, aber die Anwendung der Wage, wie sie Moore angibt, erleichtert die Ausführung derselben bedeutend, und dürfte daher deutschen Künstlern nicht unwillkommen seyn. (B)

6.

Neues Verfahren, das specifische Gewicht gepülverter Körper zu finden, von Leslie.

(Annals of Philosophy. April.)

Leslie bedient sich zur Bestimmung des specifischen Gewichtes gepulverter Körper, oder solcher, die man nicht in Wasser eintauchen kann, eines Instrumentes Fig. 10, das aus einer etwa 3 F. langen beiderseits offenen Röhre ae besteht. Der Theil ab hat 0,4 Z., der Theil be 0,2 Z. im Durchmesser. Beide Theile stehen mit einander bei b durch eine sehr feine Oeffnung in Communication, welche der Luft, aber nicht dem gepulverten Körper, den Durchgang gestattet. Der Rand a ist glatt geschliffen, und kann luftdicht mittelst einer Glasplatte geschlossen werden.

Die zu prüfende Substanz, z. B. Sand, wird in den weiteren Theil ab der Röhre gegeben, es ist aber gleichgültig, ob sie diese Röhre ganz oder nur zum Theil ausfüllt, die Röhre in verticaler Stellung in das offene mit Quecksilber gefüllte Gefäss x getaucht, bis das Quecksilber von innen und aussen nach b reicht, und die Oeffnung bei a luftdicht geschlossen. In diesem Zustande enthält ab keine andere Luft, als die, welche mit dem Sande vermengt ist. Steht nun z. B. das Barometer auf a Zoll, so hebt man das Instrument aus dem Quecksilber vertical heraus, bis inwendig nur die Säule $\frac{a}{2}$ über der Oberfläche der Flüssigkeit in x steht. Ihre Oberfläche entspreche dem Puncte c. Nun ist klar, dass die eingeschlossene Luft nur unter dem halben Luftdrucke steht, und daher einen zweimal grösseren Raum ausfüllt, und dass ab jetzt nur halb so viel Luft enthält, als vorher; die andere Hälfte derselben befindet sich in bc. Desshalb ist die Luftmenge in bc genau der gleich, welche mit dem Sande in ab gemengt war, und nimmt auch denselben Raum ein, den diese vor ihrer Dilatation einnahm. Man nehme nun den Sand heraus, wiederhohle denselben Versuch, aber mit dem Unterschiede, dass man den Raum ab ganz mit Luft gefüllt seyn lässt. Da nun jetzt die Luftmenge grösser ist, als beim vorigen Versuche, so wird sie auch, wenn man sie auf den halben Luftdruck bringt, einen grösseren Raum einnehmen, als vorhin, und das Quecksilber wird z. B. bis d reichen; dessen ungeachtet wird die verdünnte Luft in der engeren Röhre genau denselben Raum

einnehmen, den die von natürlicher Dichte unter dem ganzen Luftdrucke einnahm. Dieser Raum ist beim ersten Versuch bc, beim zweiten bd, woraus deutlich folgt, dass der Raum cd, als die Differenz beider, das Volumen der festen Masse des Sandes angibt. Erkennt man nun aus einer in be angebrachten Scale, wie viel Gran Wasser das Volumen cd hält, so kann man dieses Gewicht mit dem der festen Masse des Sandes vergleichen, und so des letzteren specifisches Gewicht finden. Dieses Verfahren ist nicht bloss sehr sinnreich, sondern gibt auch sehr wichtige Resultate bei seiner Anwendung. So bemerkt Leslie, dass einige Körper viele verdichtete Luft in ihren Zwischenräumen enthalten, und weil sie wahrscheinlich diese Eigenschaft in Pulverform in einem grossen Grade beibehalten, so begegnete er den hieraus entspringenden Fehlern dadurch, dass er die Dilatation der Luft unter einem verschiedenen Drucke, z. B. unter 10 Z., 20 Z. $7\frac{1}{2}$ zu 15 Z. mit einander verglich.

Kohle hat bekanntlich dieselbe chemische Natur wie der Diamant, und doch findet man ihr specifisches Gewicht gewöhnlich unter 0.5 angegeben. Leslie fand es in Pulverform von grösserem specifischen Gewichte als das des Diamanten ist. Mahagonyholz hat nach der gewöhnlichen Angabe ein specifisches Gewicht von 1.06; Leslie fand es durch sein Verfahren 1.68. Eben so fand er das specifische Gewicht des Weitzenmehles 1.56, des gestossenen Zuckers = 1.83, des Kochsalzes = 2.15. Stark zusammengerolltes Schreibpapier zeigt ein specif. Gewicht von 1.78, und nimmt daher weniger als $\frac{1}{2}$ des

Raumes ein, den es sonst einzunehmen scheint. Eine merkwürdige Thatsache ist die, dass vulkanischer Sand, eine scheinbar sehr leichte Substanz, ein specifisches Gewicht von 4.4 zeigt. Indess sind diese Zahlen blosse angenäherte Werthe, weil die Versuche noch nicht mit der gehörigen Genauigkeit und in hinreichender Anzahl angestellt werden konnten.

6.

Ueber die Anwendung des Heronsballs auf Kaffehmaschinen von Ph. Kulik, Professor der Physik iu Grätz.

Dr. Rommershausen in Aken hat Dampfkaffehmaschinen in Vorschlag gebracht, die sich mir nun nach mehrjähriger Erfahrung als die zweckmässigsten bewähren. Sie haben im Wesentlichen die Einrichtung des Heronsballes, welche ich hier mit einigen Abänderungen mittheile, in der Ueberzeugung, den Liebhabern dieses allgemein beliebten Getränkes, einen Dienst zu erweisen. In der Figur 11 ist AA ein Gefäss von beliebiger Form und wie der ganze Apparat von gut verzinntem Eisen- oder Messingblech, welches an den Cylinder B, und dessen konische Fortsetzung C, luftdicht angelöthet ist: B und C sind von einander durch einen siebförmig durchbrochenen Boden DE getrennt, C mündet sich bis nahe am Boden des Gefässes A; FG ist eine kleine mit mehreren Löchern durchbrochene Röhre, an welche ein Sieb HH, das im Innern des Cylinders B hinauf und herabgeschoben werden kann, angelöthet ist, und welche durch einen starken Eisendraht IK von

etwa einer Linie im Durchmesser an den Cylinder befestiget werden kann; L ist ein gut sperrender Deckel, MM die Röhre, um den Kaffeh aus B in einen gläsernen in Messing gefassten Kolben N, der bei Oo mit einem Ring versehen ist, zu leiten. Die Röhre PP dient, um den Dampf aus AA in ein Gefäss R zu bringen, und wird mittelst des Hahnes Q luftdicht geschlossen. SS ist ein Dreifuss, auf dem das Gefäss aufgestellt wird, um es mittelst einer Weingeistlampe zu erwärmen.

Die Manipulation mit diesem Apparate ist sehr einfach: Hat man das Gefäss AA über dem Dreifuss aufgestellt, und den Hahn Q geöffnet, so giesse man in den Cylinder eine etwas grössere Menge heissen Wassers, oder Kaffehaussuds, als die Menge des zu bereitenden Kaffeh's ist, und schütte über den Boden DE die erforderliche Menge gemahlenen Kaffeh's (etwa 1½ Kubikzoll zu einer Schale schwarzen, und 1 Kubikzoll zu einer Schale weissen Kaffeh's), stelle darauf das Sieb HH, mit einem darunter gelegten Filtrum von Fliesspapier, und befestige es, indem man durch eines der in der Röhre IG angebrachten Löcher und durch die Oeffnungen im Cylinder B, den Draht IK durchzieht: gut ist es, wenn dieser Draht an einem Ende mit einem Knopf, der die Oeffnung im Cylinder genau deckt, und an dem andern Ende mit einer Schraube versehen wird, um den inneren Raum von der umgebenden Luft genauer abzusperren. Nun zünde man die Lampe an, und wenn das Wasser im Gefässe zu sieden anfängt, sperre man den Hahn Q, setze den Deckel L auf, und bringe die Röhre MM in die Mündung des Kolbens; nach wenigen Minuten

wird man den klaren Kaffeh, mit allem ihm eigenthümlichen Aroma, sich in den Kolben ergiessen beobachten, nachdem nämlich der im obern Theile des Gefässes AA sich bildende Dampf durch den Druck auf das siedende Wasser solches durch die Röhre C zum aufgeschütteten Kaffeh, und von da durch das Filtrum bis zur Mündung der Röhre MM erhoben haben wird. Ist die beabsichtigte Menge Kaffeh's in N übergegangen, so kann man die Röhre PP in ein, kalten Rahm enthaltendes Gefäss R leiten, und nachdem der Hahn Q geöffnet worden ist, den gewaltsam ausströmenden Dampf benützen, um auch den Rahm zu erwärmen. Die Röhren MM und PP können aus zwei Stücken zusammengesetzt werden, welche etwa bei u in einander geschoben werden, das untere Stück über das obere, wodurch der ganze Apparat an Symmetrie gewinnen würde.

VII. Fortschritte der Physik in der neueren Zeit.

Entstehung der Klangfiguren.

Wiewohl die Anordnung des Sandes auf schwingenden Platten die ruhenden Stellen derselben von den bewegten zu unterscheiden lehret, so sind doch hiermit noch keineswegs alle Fragen beantwortet, die man sich nothwendiger Weise stellen muss, wenn man eine recht deutliche Vorstellung über den Verlauf der Sache bekommen soll. Von der Art ist die Frage, deren Beantwortung die französische Aka-

demie im Jahre 1809 zu einer Preisaufgabe machte, nämlich: Wie lassen sich aus den allgemeinen Gesetzen der Mechanik Gleichungen finden, durch welche die verschiedenen Bewegungen ausgedrückt werden, deren eine schwingende Fläche fähig ist, und bei denen jede Dimension auf eine andere Art gekrümmt wird? Vergebens verlängerte die Akademie die Zeit zur Bewerbung um diesen Preis zweimal, und als man nichts mehr erwarten zu dürfen glaubte, ertheilte man im Jahre 1816 den Preis der D. Sophie Germain, die eine richtige Differenzialgleichung, und übrigens noch einige neue Untersuchungen in einer Abhandlung einschickte. Wenn der Mathematiker die gerade genannte Frage sich stellen musste, so blieb dem Physiker noch übrig zu fragen, wie sich die Knotenlinien auf schwingenden Platten aus der Natur der schwingenden Bewegung ableiten, und von ihrem Entstehen an bis zu ihrer vollen Ausbildung Schritt für Schritt verfolgen lassen. Diese Frage haben die beiden Weber *) in ihrer Wellenlehre auf das genügendste beantwortet.

Sie lehrten zuerst bei jedem schwingenden Körper zwei Arten der Schwingungen kennen, nämlich die fortschreitende und die stehende. Bei ersterer pflanzt ein Körper den Schall durch seine Masse fort, ohne selbst zu schallen, bei letzterer tritt er selbst als schallender Körper auf, vorausgesetzt, dass die Schwingungen überhaupt mit einer Geschwindigkeit auf einander folgen, wie sie zur

*) Die Wellenlehre, und allgemeine musikalische Zeitung 1826. Nr. 12 — 14.

Erzeugung eines Schalles nothwendig ist. Es kommen aber auch beide Schwingungsarten bei nicht schallenden Schwingungen vor, ja man kann sie an Wasserwellen, an den Bewegungen eines gespannten hinreichend langen Seiles, das an einer Stelle eine Ausbeugung erlitten hat, mit Augen sehen, und so die Eigenthümlichkeit jeder dieser beiden Schwingungsarten am besten auffassen. Bei der fortschreitenden Schwingung oder Wellenbewegung lauft die an einem Orte entstandene Welle von Ort zu Ort fort, und lässt die Theile, an denen sie bereits vorübergegangen ist, ruhig zurück, wenn nicht durch eine fortgesetzte Wellenerregung eine ganze Reihe von Wellen auf einander folgt. Bei der stehenden Schwingung bleibt die Welle an ihrem Orte, und die ganze Bewegung besteht darin, dass eine Ausbeugung nach einer Richtung, z. B. nach aufwärts, in eine entgegengesetzte Richtung, nach abwärts, übergeht. Jede stehende Schwingung geht aus einer fortschreitenden hervor, wenn sich am schwingenden Körper gleich breite hin- und herlaufende Wellen auf eine regelmässige Weise begegnen. An den Stellen, wo sich zwei, z. B. nach oben oder nach unten gerichtete gleiche Ausbeugungen begegnen, wird die Ausbeugung beim Durchkreuzen noch einmal so gross, wo aber eine nach oben gerichtete Ausbeugung eine nach unten gerichtete durchkreuzet, verschwinden beide während des Durchgehens, stellen sich aber nach der Durchkreuzung wieder her, und setzen ihren Weg nach der ihnen eigenthümlichen Richtung fort. Wird ein Körper von einer Reihe gleich breiter sich durchkreuzender Wellen einge-

nommen, so treffen sich an gewissen Stellen stets gleichartige Wellen, die abwechselnd aufwärts und abwärts gerichtete Ausbeugungen bilden, an anderen Stellen trifft aber eine aufwärts gerichtete, von einer Seite herkommende Ausbeugung mit einer abwärts gerichteten von der entgegengesetzten Seite kommenden zusammen, und beide bilden im Durchschnitte einen ruhenden Punct, d. i. einen Schwingungsknoten.

So ist der Hergang der Sache bei der Bildung der Schwingungsknoten, deren mehrere zusammenhängende eine Knotenlinie geben, überhaupt, die Natur des schwingenden Körpers mag wie immer beschaffen seyn. Es hat daher wenig Schwierigkeit, dieses auf schwingende elastische Platten anzuwenden. Hält man eine Glasplatte an einer Stelle und streicht sie an einer anderen mit einem Violinbogen, so ertheilt ihr dieser durch seine Bewegung Stösse, die sich in einem gewissen Tacte wiederhohlen, und in der Platte eine ihrer Elasticität und ihren Dimensionen entsprechende Schwingung hervorbringen. Diese Schwingungen wirken auf den Bogen zurück, und bestimmen so den Tact, in welchem er am angemessensten die Platte stosst. Jeder Stoss des Bogens erzeugt in der Platte eine Welle, deren Mittelpunct in der vom Bogen berührten Stelle liegt, diese Welle erweitert sich, bis sie die Ränder der Platte erreicht; dort wird sie zurückgeworfen, kehrt schnell zu dem Orte zurück, von wo sie ausging und erzeugt daselbst einen neuen Stoss auf den Bogen. Beim Zurückkehren trifft sie auf directe gleich lange Wellen, durchschneidet sie, verwandelt die fortschreitende Schwingung in eine stehende, und erzeugt so die

Knotenlinien, deren Inbegriff und relative Lage durch aufgestreuten Sand sichtbar wird, und Klangfigur heisst.

Bildung des Tartinischen dritten Tones.

Wenn zwei harmonirende Töne von gleicher Stärke einige Zeit anhalten, so hört man einen dritten tieferen mitklingen, der von einigen der Tartinische Ton genannt wird, dessen aber lange vor Tartini, Andreas Sorg, ein Deutscher, in seiner 1744 im Drucke erschienenen Anweisung zur Stimmung der Orgelwerke und des Clävier's gedenkt. Chladni erklärt diesen Ton aus dem in gleichen Zwischenzeiten erfolgenden Zusammentreffen der Schläge beider tönender Körper, wodurch eine Reihe von stärkeren Schlägen entsteht, die langsamer auf einander folgen, als die der zwei tönenden Körper, von denen er ausgeht, und die Empfindung eines tieferen Tones erzeugen. Purkinje*) sieht ihn als einen bloss subjectiven Ton an, weil er innerhalb der Sphäre des Gehörsinnes erzeugt wird, gleichwie es mit den Blendungsfarben etc. in Betreff des Gesichtssinnes der Fall ist. Um sich davon factisch zu überzeugen, räth er folgenden Versuch anzustellen: Man lasse zwei reine Diskantstimmen, am besten im grossen Terzintervall, laut anstimmen, bis man den dritten Ton deutlich vernimmt. Man entferne sich hierauf allmählig von den Singenden, stelle sich bald auf diese, bald auf jene Seite, horche bald mit diesem bald mit jenem Ohr und versuche den Ort anzugeben, von dem der dritte Ton kommt. Man wird ihn keineswegs so an-

*) Kastner's Archiv. 1826. Heft 1. S. 39.

geben können, wie man es bei Tönen im Stande ist, welche einen objectiven Ursprung haben; bei mehr Fertigkeit wird man sich von diesem Tone überall verfolgt glauben und so deutlich wahrnehmen, dass sein Ursprung im Gehörorgane selbst zu suchen sey, was auch die eigene betäubende Empfindung und die Eingenommenheit des Kopfes bestätiget, welche ihn zu begleiten pflegt.

Neue Gesetze der Vibrationen der Luft und Verbesserung der Orgelpfeifen.

Man wusste seit Dan. Bernoulli's gelehrten Untersuchungen über die Töne der Orgelpfeifen, welche in den Memoires de l'Acad. de Paris 1762 enthalten sind, dass die Anzahl der Schwingungen einer Luftsäule verkehrt der Länge dieser Säule proportionirt sey, wenn diese der ganzen Oeffnung nach erschüttert wird, und dass die Anzahl der Schwingungen geringer ist als dieses Gesetz angibt, wenn die Erschütterung nur an einem Theile der Oeffnung der Pfeife Statt findet. Allein man kannte die Gesetze der Schwingungen einer Luftsäule, die sich in einem solchen Falle befindet, nicht, bis Savart *), dem die Akustik schon früher so viel verdankte, sie auf experimentellem Wege darstellte und dadurch die Möglichkeit begründete, beim Baue der Orgelpfeifen nach Grundsätzen zu verfahren, während man bis jetzt hierin fast ganz dem Zufalle Preis gegeben war. Er zeigt, dass in jedem Falle, wo eine Luftmasse nur partiell erschüttert wird, die Phänomene, die daraus hervor-

*) Annales de Chimie et de Physique. tom. 29. p. 404.

gehen, von der Grösse und der Lage des Mundloches, und vom Volumen und der Gestalt der Luftsäule abhängen, ohne dass die ursprüngliche Richtung des Luftstromes, durch welchen die Erschütterung erfolgt, einen merklichen Einfluss darauf ausübte. Ferner fand er, dass das für Pfeifen von ähnlicher Gestalt gültige Gesetz: die Anzahl der Luftschwingungen ist den linearen Dimensionen der Pfeifen proportionirt; dann das für sehr enge Pfeifen aufgestellte Gesetz, wo die Luft in der ganzen Oeffnung erschüttert ist: die Anzahl der Schwingungen verhält sich, wie verkehrt die Länge der Pfeife; endlich das für eine Luftmasse, die aus dünnen auf einerlei Weise erschütterten Schichten besteht, bestätigte: die Schwingungen verhalten sich verkehrt, wie die Quadratwurzeln der Oberfläche der schwingenden Masse, dass alle diese Gesetze nur besondere Fälle eines allgemeinen Ausdruckes sind, nach dem man die Anzahl der Schwingungen einer Luftmasse von was immer für Dimensionen, die wie immer erschüttert wird, bestimmen kann. Die Mündung lässt sich nach Savart als der Ort betrachten, von wo eine unendliche Anzahl von Luftwellen ausgeht, die sich in der übrigen Masse wie in freier Luft ausbreiten, von den Wänden reflectirt werden und durch ihr Zusammentreffen mit den directen Wellen Knotenflächen erzeugen, deren Gestalt von der Form und den Dimensionen der Pfeife, und bei derselben Pfeife von der Grösse und Lage der Mündung abhängt. Soll die Stärke der Töne bedeutend seyn, so muss die Länge der ursprünglichen Luftwellen den Dimensionen der Pfeife angemessen seyn. Man sieht hieraus, wie homogen die Ansich-

ten **Savarts** und die der Verfasser der Wellenlehre über das Entstehen der Schwingungsknoten sind. Das Eigenthümliche des ersteren liegt nur darin, dass er bei schallenden Luftsäulen Knotenflächen nachweiset, welche auf der Mündung senkrecht stehen, und wodurch die schwingende Luftäule, selbst in prismatischen Pfeifen, durch einen elliptischen Cylinder begränzt wird. **Savart** leitete von diesen Gesetzen sehr interessante Regeln zur Verbesserung im Baue der Orgelpfeifen ab. Diese sind im Wesentlichen folgende:

1. Man soll lauter Orgelpfeifen von ähnlicher Gestalt anwenden, damit, wenn man einmal eine Form derselben gefunden hat, die irgend einen Ton am vollkommensten gibt, man die andern nach dem Gesetze, dass sich die Anzahl der Schwingungen verkehrt wie die linearen Dimensionen verhalten, vergrössert oder verkleinert darstellen könnte.

2. Kubische Pfeifen geben die reinsten und ganz eigenthümlich klingende Töne, sprechen ungemein leicht an und nehmen sehr wenig Platz ein. Ein Würfel von 53 — 54 Linien nach einer Dimension kann eine gewöhnliche Orgelpfeife von 10 — 11 Zoll Länge und 2 — $2\frac{1}{2}$ Z. an jeder Seite ersetzen.

3. Man könnte zur Raumersparung auch von dem Satze Gewinn ziehen, dass man an einer prismatischen Pfeife mit quadratförmiger Basis, letztere ohne Aenderung des Tones vermindern kann.

4. Es wäre vielleicht vortheilhaft die Mündung in der Mitte der Seitenwand anbringen. Man erlangt dadurch einen sehr angenehmen Ton.

5. Kurze Pfeifen, bei denen die einzelnen auf

der Mündung senkrechten Luftschichten nicht einerlei Bewegung haben, scheinen keine angenehmen Töne geben zu können. Von der Art sind sphärische Pfeifen und auch kubische, an denen die Mündung in der Mitte einer ihrer Seiten angebracht ist.

6. Bei krummen Pfeifen hat das Material derselben und die Dicke der Wände einen grossen Einfluss auf die Beschaffenheit und Höhe des Tones.

Nutzen des Trommelfells und des äusseren Ohres.

Es sind zwar über die Functionen der einzelnen Theile des Gehörorganes viele Hypothesen aufgestellt worden, keine aber hat man auf experimentellem Wege näher geprüft, bis Savart *) durch directe Versuche zeigte, wie sich die Bewegung eines in der Luft vibrirenden Körpers den verschiedenen Theilen des Gehörorganes, die mit der Luft in Berührung stehen, mittheilen kann. Um diese Versuche entscheidend einzurichten, musste er zuerst die Art untersuchen, wie sich der Schall durch die Luft einem Körper mittheilt, und zu diesem Behufe Körper wählen, welche dem Gehörorgane möglichst ähnlich waren, aber doch, da sie von beliebiger Grösse gewählt werden konnten, die Art der Schwingung, in die sie geriethen, genauer zu erkennen gaben, als es die Theile des Gehörorganes bei ihrer stets nur geringen Ausdehnung gestatten können. Von der Art sind Scheibchen aus Papier, die an ihrem Umfange auf einen Ring gespannt, in eine horizontale Rich-

*) Annales de Chimie et de Physique 1824. tom. 26. p. 5 seqq.

tung gebracht, und mit feinem Sande bestreut wurden. Brachte man eine tönende Glasscheibe, deren Ebene mit der des Plättchens parallel gehalten wurde, in seine Nähe, so theilte sich ihm mittelst der Luft die Bewegung der ersteren mit, und man konnte sie aus dem Aufhüpfen des Sandes erkennen und sehen, dass diese Mittheilung durch die Luft gerade so vor sich geht, als wenn beide Scheiben mittelst eines Glasstabes mit einander verbunden wären. Jeder Neigung und Lage beider Körper gegen einander entsprach eigene Bewegung im Papiere, aber immer erfolgten die mitgetheilten Vibrationen nach derselben Richtung, wie die des ursprünglich vibrirenden Körpers, mithin so, als wenn beide vibrirende Körper statt durch eine Luftsäule durch einen festen Körper in Verbindung stünden. Die Entfernung beider Körper von einander, bei der die Mittheilung noch Statt findet, richtet sich nach der Dicke und Spannung der Membrane, die man zum Versuch braucht. Ist diese sehr dünn, so findet selbst bei einer Entfernung von mehreren Métern noch eine Mittheilung Statt. Man kann auch ohne Aenderung des Erfolges statt der Glasscheibe eine tönende Orgelpfeife anwenden.

Aendert sich während der Communication der Bewegung die Spannung des Häutchens, welches bei Papier durch seine hygroscopische Eigenschaft sehr leicht bewirkt wird, so erleiden auch die Klangfiguren auf demselben eine Aenderung, wenn auch die des mittheilenden Körpers unverändert bleiben; bei einerlei Spannung bleibt dieselbe Figur. Wird das Häutchen angefeuchtet, oder mit Oehl getränkt, so bleiben alle Gesetze der Mittheilung unverändert die-

selben, ja man bemerkt, dass sich in diesem Falle die Abtheilung in Parthien, welche durch kreisförmige Knotenlinien von einander getrennt sind, mit einer ganz besonderen Reinheit und Leichtigkeit herstellt. Desshalb sind auch Membrane, die erst durch eine künstliche Spannung elastisch werden, viel empfindlicher für die mitgetheilten Vibrationen, als solche, die von Natur aus schon elastisch sind, und dazu keiner Spannung bedürfen.

Nachdem Savart auf diese Weise die Gesetze ins Klare gebracht hatte, nach welchen die Mittheilung einer schwingenden Bewegung mittelst der Luft geschieht, untersuchte er die Functionen der einzelnen wichtigeren Theile des Gehörorganes. Er brachte an einem Kopfe mittelst einer Säge einen Schnitt parallel mit dem Trommelfell an, damit dasselbe blos gelegt ward, liess es in der Luft so lange austrocknen, bis er nicht mehr befürchten durfte, dass feiner, darauf gestreuter Sand adhärire, bestreute es dann mit Sand, hielt eine tönende Platte in die Nähe, und beobachtete die Bewegung desselben. Wurde die Trommelhöhle geöffnet, um die Muskeln beobachten zu können, die an den Gehörknöchelchen angeheftet sind, so fand man, dass das Trommelfell schwerer in Bewegung versetzt werden kann, sobald es gespannt ist, so, dass man annehmen muss, der Nutzen der Muskel, welche diese Spannung bewirkt, bestehe darin, das Organ gegen zu starke Eindrücke zu schützen.

Der Ohrmuschel hatte man lange die Function angewiesen, die Schallwellen, welche am Ohre anlangen, zu concentriren, und auf diese Weise den

Schall zu verstärken; Savart hat aber durch directe Versuche dargethan, dass sie ausser diesem noch zu einem anderen Zwecke diene: dass sie nämlich selbst in Schwingung gerathe, dadurch die Schwingungen der Trommelhaut unterstütze und insbesondere den ankommenden Schallwellen, sie mögen was immer für eine Neigung gegen die Trommelhaut haben, immer eine bestimmte Fläche darbiete, deren Richtung mit der Richtung der Theile der Welle normal ist, und die Intensität des Schalles von der Neigung der ankommenden Wellen gegen das Ohr unabhängig mache.

Auf die Natur der Schwingungen der Trommelhaut hat nach S. der Stiel des Hammers einen grossen Einfluss; denn dieser ist an der inneren Fläche der Trommelhaut von einem Puncte ihres Umfanges bis zur Mitte befestiget. Auch diesen Umstand hat er durch Experimente heraus gehoben, und gezeigt, dass der Hammer eine zweifache Verrichtung habe: 1) mittelst der ihm eigenen Muskel die Spannung der Trommelhaut zu ändern, sie gegen zu starke Eindrücke zu schützen, und für schwache empfänglich zu machen; 2) an der Bewegung der Trommelhaut Theil zu nehmen, und sie zu anderen Theilen fortzupflanzen; denn da dieser Knochen mit dem Ambos in unmittelbarer Berührung steht, dieser mit dem rundlichen Beine des Sylvius, und durch dieses mit dem Steigbügel communicirt, so ist es klar, dass sich jede Bewegung der Trommelhaut dem ovalen Fenster ohne die mindeste Aenderung in der Periode der Oscillationen mittheilen wird.

Auf die Frage, warum geschehen denn die Schall-

eindrücke nicht unmittelbar auf die Häute, welche die Oeffnungen des Labyrinthes schliessen, und wozu dienet denn die Trommelhaut und die Trommelhöhle? antwortete S.: Die Trommelhaut verwehrt der äusseren Luft den Eintritt in das Ohr, und die Trommelhöhle bildet ein Behältniss für die Luft, welche durch die Eustachische Trompete aus dem Munde kommt, so dass sich in ihm eine Art Atmosphäre von beständiger Temperatur bildet. Dadurch wird bewirkt, dass die Theile des Ohres ungeachtet der Aenderungen der äusseren Temperatur stets dieselbe Elasticität beibehalten, und das Ohr schon einmal wahrgenommene Töne wieder erkennen kann, welches nicht der Fall wäre, wenn dieselben Oscillationen bei verschiedener Temperatur und daher bei verschiedener Elasticität der einzelnen Theile erfolgten.

Fortpflanzung der vibrirenden Bewegung in tropfbaren Flüssigkeiten.

Seit man über die innere Beschaffenheit des Gehörorganes Kenntniss hat, weiss man, dass einige Theile desselben sich ganz in tropfbaren Flüssigkeiten befinden, andere mit solchen in unmittelbarer Berührung stehen, und dass die Fortpflanzung des Schalles im Ohre bis zum Gehörnerve auf den Gesetzen beruht, nach welchen sich die vibrirende Bewegung den Flüssigkeiten mittheilt. Seit geraumer Zeit ist man darüber im Klaren, dass diese Fortpflanzung durch tropfbare Flüssigkeiten so vor sich gehen kann, wie durch einen anderen Körper; es fehlte nur noch, dass durch Versuche ausgemittelt werde, nach welcher Richtung sich die Theile einer

Flüssigkeit bewegen, die mit einem vibrirenden Körper in unmittelbarer Verbindung steht. Auch diese Arbeit hat Savart *) unternommen und gezeigt, dass sich die Theile einer Flüssigkeit, die einerseits mit einem vibrirenden Körper in unmittelbarer Berührung stehen, nach einer Richtung bewegen, welche mit der jenes Körpers parallel ist, und dass durch die Flüssigkeit ein anderer damit communicirender Körper selbst nach demselben Gesetze in Vibrationen versetzt werden kann, es mag letzterer in die Flüssigkeit zum Theile oder ganz eingetaucht seyn. Man kann nun mit Zuversicht behaupten, dass die Mittheilung der vibrirenden Bewegung unter Körpern von was immer für einem Aggregationszustande nach demselben Gesetze vor sich geht. Als den allgemeinsten Ausdruck dieses Gesetzes gibt Savart an: Wenn in einem Systeme von Körpern einzelne Theile erschüttert werden, und sich desshalb nach einer bestimmten Richtung bewegen müssen, so gerathen alle Theile dieses Systemes in Schwingungen nach Richtungen, die unter sich und mit der des ursprünglich vibrirenden Theils parallel sind.

Es ist nun leicht, nach diesem Gesetze den Verlauf der Sache bei der Fortpflanzung des Schalles im Ohre zu begreifen. Enthält nämlich das Labyrinth eine Flüssigkeit, wie sie die meisten Anatomen annehmen, so muss sie die Bewegung den sie umgebenden Theilen mittheilen, ohne ihre Richtung und die Anzahl der Schwingungen zu ändern.

---

*) Annales de Chimie etc. Mars, 1826. p. 283 et seq.

MATHEMATISCHE ABTHEILUNG.

I. Elementarischer Beweis der Formel für die Schwingungszeit des einfachen Pendels. Von Dr. Jak. Phil. Kulik, Professor der Physik in Grätz.

Die Formel für die Schwingungszeit eines einfachen Pendels gehört unstreitig unter die wichtigsten Sätze der Physik und der angewandten Mathematik: sie wird gewöhnlich mittelst der Differential- und Integralrechnung bewiesen, noch öfters aber in solchen Lehrbüchern, welche die sogenannte höhere Mathematik nicht voraussetzen mögen, ohne allen Beweis aufgeführet. Da nun der Unterricht über die höhere Mathematik in den österreichischen Staaten blos an dem polytechnischen Institute zu Wien, und an den Universitäten zu Wien, Prag, Ofen, Padua und Pavia ertheilt wird, und sonach die Zahl der mathematischen Leser, denen jener Beweis unverständlich ist, ziemlich gross seyn dürfte; so schien es mir der Mühe werth, über einen aus den Elementen der Mathematik geschöpften Beweis dieses Satzes um so mehr nachzudenken, als mir nicht bekannt ist, dass ihn Jemand auf diesem Wege verfolgt und aufgestellt hätte.

Bekanntlich erhält ein Körper durch die Bewegung auf der schiefen Ebene dieselbe Geschwindig-

keit, welche er im freien Fall durch die Höhe der schiefen Ebene erlangt haben würde; dass dieser Satz auch für die Bewegung eines Körpers auf einer krummen Linie gilt, wird gewöhnlich stillschweigend angenommen, welches sich jedoch leicht beweisen lässt. Es sey AQB (Fig. 12) eine in einer verticalen Ebene liegende krumme Linie, und die Tangenten ihrer Endpuncte AC, BC mögen den Winkel BCD=a einschliessen; man theile ihn durch fortgesetzte Halbirungen in eine beliebige Anzahl n gleicher Theile, durch die geraden Linien CE, CF, CG . . . u. s. f., und ziehe die mit ihnen parallelen Tangenten HI, KL, MN an die krumme Linie, welche ein um dieselbe beschriebenes, und zwar gleichwinkeliges Vieleck AMNLIB bilden werden, weil die Seiten des Vieleckes den die gleichen Winkel DCG, GCF, FCE, ECI einschliessenden geraden Linien parallel sind, und sonach AMM′=DCG, MNK=GCF u. s. f., mithin jeder derselben $= \frac{1}{n}a$ ist. Gesetzt ein schwerer Körper würde durch einen nach dem Vieleck MNLI geformten Canal sich selbst überlassen, so müsste er, die Hindernisse der Bewegung bei Seite gesetzt, bei der Bewegung durch MN dieselbe Geschwindigkeit erlangen, als im freien Fall durch MO, wenn MH vertical, und NO durch N horizontal gezogen ist, und die Zunahme der Geschwindigkeit bei der Bewegung durch NL würde dieselbe seyn, wie im freien Fall durch OH, wenn LH eine durch L gezogene horizontale vorstellt. Da derselbe Schluss bei den folgenden Ecken L, I u. s. f. gilt: so ist klar, dass, wofern er beim Uebergang aus einer Ebene in die

nächstfolgende durch den schiefen Stoss keinen Verlust an Geschwindigkeit erleidet, der obige Satz auch für die Bewegung eines schweren Körpers in einem nach einem Vieleck gebrochenen Canal gelten muss.

Um nun die Zulässigkeit der eben erwähnten Bedingung zu prüfen, sei $NP = c$ die Geschwindigkeit des bei N ankommenden Körpers, man zerlege sie, indem man das Rechteck NQPR verzeichnet, dessen Diagonale NP ist, in die Geschwindigkeiten NQ und PQ, jene nach der Richtung der Bewegung, diese darauf senkrecht; so ist

$NQ = PN.\cos.PNQ = c.\cos\frac{1}{n}a$ die Geschwindigkeit des Körpers nach der veränderten Richtung NL, mithin der Geschwindigkeitsverlust an dem Ecke N gleich

$$c - c.\cos\frac{1}{n}a = c\left(1 - \cos\frac{1}{n}a\right) = 2c.\sin^2\frac{1}{n}a$$

welcher für den Fall, dass n sehr gross ist, oder der vieleckig gebrochene in einen stetig gekrümmten Canal übergeht, verschwindet; es ist sonach bei der Bewegung eines schweren Körpers auf einer krummen Linie jener Geschwindigkeitsverlust Null, und die zu Ende der Bewegung vom Körper erlangte Geschwindigkeit dieselbe, wie im freien Falle durch die Höhe der krummen Linie.

Wenn ein Pendel AB (Fig. 13) um den Bogen $CB = a$ von der verticalen Lage abgelenkt wird, so sei $CD = g$ die Beschleunigung der Schwere, und es werde diese durch Construction des Kräfteparallelogramms CEDF in die Kräfte CF, CE zerfällt, deren jene durch die Festigkeit des Fadens aufgehoben wird, diese aber auf jener senkrecht ist, und die

Richtung dieselbe Geschwindigkeit, als das Pendel in jenem Puncte hat, der mit dem ersteren auf derselben Ordinate des Kreises sich befindet; wenn also derselbe und das Pendel ihre Bewegung in I gleichzeitig beginnen, so werden sie beständig auf einer und derselben Ordinate des Kreises, wie ML, einander begleiten, und mithin gleichzeitig in N anlangen, nachdem jener den Umfang des Halbkreises, dieser aber den Durchmesser desselben zurückgelegt hat: man erhält aber die Zeit des gleichförmigen Umlaufes des ersteren im Halbkreise, indem man den zurückgelegten Weg mit der Geschwindigkeit dividirt, mithin $= \frac{\pi . IK}{c} = \frac{\pi a l}{\pi \sqrt{gl}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, welches sonach die Schwingungsdauer eines einfachen Pendels ist.

II. Ueber einen neuen, der Infinitesimal-Rechnung analogen Calcul.

(Exercices de Mathematiques par M. Augustin-Louis Cauchy. Paris 1826. pag. 11 etc.)

Die Differenzial-Rechnung, welcher die Analysis so viel verdankt, gründet sich bekanntlich auf die Betrachtung der Differenzial-Coefficienten oder der abgeleiteten Functionen. Wächst eine unabhängige veränderliche Grösse x um eine unendlich kleine Differenz ε, so erleidet eine Function $f(x)$ dieser Veränderlichen im Allgemeinen ebenfalls eine unendlich kleine Aenderung, deren erstes Glied der Differenz ε proportionirt ist, und durch ε getheilt, den sogenann-

ten Differenzial-Coefficienten darbietet. Dieser Coefficient besteht für jeden Werth von x, und verschwindet nur in dem Falle fortwährend, wenn die vorgelegte Function sich auf eine beständige Grösse reducirt. Eine ganz andere Bewandniss hat es mit dem Coefficienten, von welchem hier die Rede seyn wird; er ist im Allgemeinen = o und tritt nur für besondere Werthe der veränderlichen Grösse x auf. Kennt man die Werthe von x, für welche $f(x)$ unendlich gross wird, und setzt man einem derselben z. B. x_1 die unendlich kleine Aenderung ε zu, so enthalten die ersten Glieder der nach den steigenden Potenzen von ε geordneten Entwickelung der Function $f(x_1 + \varepsilon)$ offenbar diese Aenderung mit negativen Exponenten, und eines dieser Glieder ist das Product von $\frac{1}{\varepsilon}$ mit einem endlichen Coefficienten, welchen wir den auf den besonderen Werth x_1 sich beziehenden Rest (résidu) der Function $f(x)$ nennen wollen.

Die Reste dieser Gattung stellen sich in mehreren Zweigen der Analysis ungezwungen dar. Ihre Betrachtung verschafft uns einfache, leichte, auf eine grosse Menge mannigfaltiger Aufgaben anwendbare Methoden, und neue, der Aufmerksamkeit der Geometer nicht unwürdige Formeln. So führt der Calcul mit diesen Resten zu der Interpolations-Formel von Lagrange; zur Zerlegung rationaler Brüche, ihre Nenner mögen gleiche oder durchgehends verschiedene Wurzeln besitzen; zu allgemeinen Formeln für die Ausmittelung der Werthe der innerhalb bestimmter Grenzen genommenen Integrale; zur Summirung einer Menge von Reihen und insbesondere solcher,

deren Glieder mit periodischen Grössen verknüpft sind; zur Integration der mit beständigen Coefficienten versehenen linearen Gleichungen mit endlichen oder unendlich kleinen Differenzen und mit oder ohne einem veränderlichen Endgliede, zur Reihe von Lagrange und anderen derselben Gattung, zur Auflösung der algebraischen oder transcendenten Gleichungen u. d. gl.

Die Aufsuchung der Reste der Functionen unterliegt gewöhnlich keinen Schwierigkeiten. Es sey nämlich, wie oben x_1 einer der Werthe von x, für welche $f(x)$ unendlich wird, d. h. eine der Wurzeln der Gleichung

(1) $$\frac{1}{f(x)} = 0.$$

Der Werth des Productes $(x - x_1)f(x)$ für $x = x_1$ nimmt eine unbestimmte Form an, in der That aber ist er meistens eine endliche Grösse. Unter dieser Voraussetzung sey

(2) $$(x - x_1)f(x) = \mathrm{f}(x)$$

so folgt hieraus

(3) $$f(x) = \frac{\mathrm{f}(x)}{x - x_1}$$

und

(4) $$f(x_1 + \varepsilon) = \frac{\mathrm{f}(x_1 + \varepsilon)}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{f}(x_1) + \mathrm{f}'(x_1 + \Theta\varepsilon)$$

wobei f' die abgeleitete Function der mit f bezeichneten andeutet und Θ eine die Einheit nicht erreichende Zahl vorstellt. Es ist demnach

(5) $$\mathrm{f}(x_1)$$

oder mit anderen Worten der Werth des Productes

(6) $$\varepsilon f(x_1 + \varepsilon) \text{ für } \varepsilon = 0$$

der sich auf die Annahme $x = x_1$ beziehende Rest der Function $\mathit{f}(x)$. Wir haben hier stillschweigend vorausgesetzt, dass die Gleichung (1) bloss eine der Grösse x_1 gleiche Wurzel zulässt.

Man sagt der Gleichung (1) gehöre die Wurzel x_1 m mal, wenn das Product $(x - x_1)^m \mathit{f}(x)$ für $x = x_1$ einen endlichen von der Nulle verschiedenen Werth erhält. Es sey unter dieser letzteren Voraussetzung

(7) $$(x - x_1)^m \mathit{f}(x) = f(x)$$

so wird $f(x_1)$ eine endliche Grösse, und man hat

(8) $$\mathit{f}(x) = \frac{f(x)}{(x - x_1)^m}$$

woraus sich, wenn man $x = x_1 + \varepsilon$ seyn lässt, und $\Theta < 1$ ist,

(9) $$\mathit{f}(x_1 + \varepsilon) = \frac{f(x_1 + \varepsilon)}{\varepsilon^m}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^m} f(x_1) + \frac{1}{\varepsilon^{m-1}} \frac{f'(x_1)}{1} + \frac{1}{\varepsilon^{m-2}} \frac{f''(x_1)}{1 \cdot 2} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{f^{(m-1)}(x_1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)} + \frac{f^{(m)}(x_1 + \Theta\varepsilon)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m}$$

ergibt. Die endliche Grösse

(10) $$\frac{f^{m-1}(x_1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)}$$

oder mit anderen Worten, den Werth des Ausdruckes

(11) $$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)} \; \frac{d^{m-1}[\varepsilon^m \mathit{f}(x_1 + \varepsilon)]}{d\varepsilon^{m-1}}$$

wenn nach verrichteten Differenziationen $\varepsilon = 0$ gesetzt wird, stellt also den Rest der Function $\mathit{f}(x)$ für $x = x_1$ dar.

Der Kürze wegen soll die Summe der hinsichtlich aller reellen und imaginären Wurzeln der Gleichung (1) genommenen Reste der Function $f(x)$ der **Integralrest** dieser Function heissen; dürfen aber nur jene Reste summirt werden, welche sich auf Wurzeln beziehen, in denen die reellen Theile und die Coefficienten von $\sqrt{-1}$ vorgeschriebene Grenzen nicht übersteigen, so wollen wir sagen, der Integralrest sey innerhalb gegebener Grenzen genommen. Die Ableitung der Reste aus einer vorgelegten Function soll die **Ausziehung** (Extraction) der Reste genannt und durch den als ein neues Zeichen einzuführenden Buchstaben E angezeigt werden; zur Bezeichnung des Integralrestes diene derselbe Buchstabe, während die Function mit doppelten Klammern umgeben ist, wie folgendes Symbol

(12) $$E((f(x)))$$

nachweiset. Die doppelten Klammern sollen auf die Vieldeutigkeit der Werthe der veränderlichen x aufmerksam machen.

Erscheint die Function $f(x)$ unter der gebrochenen Form

(13) $$f(x) = \frac{f(x)}{F(x)}$$

so werden wir, um die Summe ihrer zu den Wurzeln der Gleichung

(14) $$F(x) = 0$$

gehörenden Reste anzudeuten

(15) $$E\frac{f(x)}{((F(x)))}$$

schreiben, indem wir die Doppel-Klammern bloss bei dem Zeichen der Function F(x) anbringen. Die Bezeichnung

$$(16) \qquad \mathrm{E}\frac{((f(x)))}{F(x)}$$

hingegen soll die Summe der Reste von $f(x)$ in Bezug auf die Wurzeln der Gleichung

$$(17) \qquad \frac{1}{f(x)} = 0$$

ausdrücken.

Auf gleiche Weise soll, wenn man

$$(18) \qquad F(x) = \varphi(x) \cdot \chi(x)$$

setzt, die erste der Bezeichnungen

$$(19) \qquad \mathrm{E}\frac{f(x)}{((\varphi(x)))\chi(x)}, \qquad \mathrm{E}\frac{f(x)}{\varphi(x)((\chi(x)))}$$

Die Summe der Reste der erwähnten Function $f(x)$ hinsichtlich der Wurzeln der Gleichung $\varphi(x) = 0$ und die zweite die Summe der Reste hinsichtlich der Gleichung $\chi(x) = 0$ vorstellen, so dass im Allgemeinen die Gleichung

$$(20) \ \mathrm{E}\frac{f(x)}{((\varphi(x) \cdot \chi(x)))} = \mathrm{E}\frac{f(x)}{((\varphi(x))) \cdot \chi(x)} + \mathrm{E}\frac{f(x)}{\varphi(x) \cdot ((\chi(x)))}$$

besteht. Eben so erhält man, wenn man

$$(21) \qquad f(x) = \varphi(x) \cdot \chi(x)$$

setzt, die Gleichung

$$(22) \ \mathrm{E}\frac{((\varphi(x) \cdot \chi(x)))}{F(x)} = \mathrm{E}\frac{((\varphi(x))) \cdot \chi(x)}{F(x)} + \mathrm{E}\frac{\varphi(x) \cdot ((\chi(x)))}{F(x)}$$

in welcher von den beiden Gliedern des zweiten Theiles das erste die Summe der Reste von $f(x)$ in Bezug auf die Wurzeln der Gleichung $\frac{1}{\varphi(x)} = 0$, und das zweite die Summe der Reste eben dieser Function in Bezug auf die Wurzeln der Gleichung $\frac{1}{\chi(x)} = 0$ anzeigt. Lässt man insbesondere

$\chi(x) = x - x_1$ seyn, so verwandelt sich das zweite der Symbole (19) in

$$(23) \qquad \mathcal{E} \frac{f(x)}{((x-x_1))\,\varphi(x)}$$

und stellt den partiellen Rest der genannten Function in Bezug auf eine einzelne Wurzel der Gleichung (1) vor. Ferner, da unter dieser Voraussetzung

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = (x - x_1) f(x)$$

ist, so sieht man, dass der dem Werthe $x = x_1$ entsprechende Rest auch durch

$$(24) \qquad \mathcal{E} \frac{(x-x_1)\,f(x)}{((x-x_1))}$$

bezeichnet werden kann, was sich auch unmittelbar aus obigen Annahmen ergibt. Endlich wollen wir, um die Summe der Reste von $f(x)$ anzuzeigen, welche sich nur auf diejenigen unter den Wurzeln der Gleichung (1) beziehen, deren reelle Theile innerhalb den Grenzen x_0, X, und deren Coefficienten von $\sqrt{-1}$ innerhalb den Grenzen y_0, Y liegen, das Symbol

$$(25) \qquad {}_{x_0}^{X}\mathcal{E}_{y_0}^{Y} ((f(x)))$$

zu Hülfe nehmen. Gehören also der Gleichung (1) bloss imaginäre Wurzeln, so stellt

$$(26) \qquad {}_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_{0}^{\infty} ((f(x)))$$

die Summe jener Reste vor, welche zu den Wurzeln gehören, deren imaginäres Radical $\sqrt{-1}$ mit positiven Coefficienten versehen ist.

Aus diesen Annahmen folgt, wenn x_1 einen be-

sonderen Werth von x anzeigt, für welchen f(x) oder $f^{(m-1)}(x)$ einen endlichen Werth erhält,

$$(27)\qquad E\,\frac{f(x)}{((x-x_1))} = f(x_1)$$

$$(28)\qquad E\,\frac{f(x)}{(((x-x_1)^m))} = \frac{f^{(m-1)}(x_1)}{1.2.3\ldots(m-1)}$$

Gehört der Gleichung (1) die Wurzel x_1 nur einmal, so hat man für $\varepsilon = 0$,

$$(29)\qquad E\,\frac{(x-x_1)f(x)}{((x-x_1))} = \varepsilon f(x_1+\varepsilon)$$

und lässt diese Gleichung die Wurzel x_1 m mal zu, so ist

$$(30)\qquad E\,\frac{(x-x_1)f(x)}{((x-x_1))} = \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\cdot\frac{d^{m-1}[\varepsilon^m f(x_1+\varepsilon)]}{d\varepsilon^{m-1}}$$

wenn man nach verrichteter Differentiation $\varepsilon = 0$ nimmt.

Erscheint die Function $f(x)$ unter der gebrochenen Form $\frac{f(x)}{F(x)}$, und bedeutet x_1 eine Wurzel der Gleichung $F(x) = 0$, so hat man

$$F(x_1+\varepsilon) = \varepsilon F'(x_1+\Theta\varepsilon)$$

wobei der über F angebrachte Accent wie gewöhnlich die Form der abgeleiteten Function, und Θ eine die Einheit nicht erreichende Zahl anzeigt. Es wird also in diesem Falle der Werth des Productes $\varepsilon f(x_1+\varepsilon)$ für $\varepsilon = 0$ durch $\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}$ ausgedrückt, und die Formel (29) gibt

$$(31)\qquad E\,\frac{(x-x_1)f(x)}{((x-x_1))} = \frac{f(x_1)}{F'(x_1)}$$

Bedeutet endlich a eine zwischen x_0 und X,

und b eine zwischen y_0 und Y enthaltene Grösse, so ist allgemein

$$(32)\quad {}_{x_0}^{\;X}\mathbf{E}_{y_0}^{Y}((f(x))) = {}_{x_0}^{\;a}\mathbf{E}_{y_0}^{Y}((f(x))) + {}_{a}^{X}\mathbf{E}_{y_0}^{Y}((f(x))).$$

und

$$(33)\quad {}_{x_0}^{\;X}\mathbf{E}_{y_0}^{Y}((f(x))) = {}_{x_0}^{\;X}\mathbf{E}_{y_0}^{b}((f(x))) + {}_{x_0}^{\;X}\mathbf{E}_{b}^{Y}((f(x)))$$

Um diese letzteren Formeln jeder denkbaren Beschaffenheit der Grössen a, b, x_0, X, y_0, Y anzupassen, muss man in dem durch das Symbol (25) vorgestellten Integralreste jeden Partialrest, welcher sich auf eine Wurzel bezieht, deren reeller Theil mit einer der Grenzen x_0, X, oder deren Coefficient von $\sqrt{-1}$ mit einer der Grenzen y_0, Y zusammenfällt, auf die Hälfte seines Werthes, und wenn beide Fälle zugleich eintreten, auf den vierten Theil seines Werthes reduciren. Hat die Gleichung (1) reelle und imaginäre Wurzeln, so zeigt das Symbol (26) unter dieser Beschränkung offenbar an, dass zu der halben Summe der den reellen Wurzeln gehörenden Reste die Summe jener Reste hinzukommen soll, welche sich auf imaginäre mit einem positiven Factor von $\sqrt{-1}$ versehene Wurzeln beziehen.

Man setze nun statt $f(x)$ die Summe mehrerer Functionen $\varphi(x)$, $\chi(x)$ etc., so gelangt man ohne Schwierigkeit zu den Formeln

$$(34)\quad \mathbf{E}((\varphi(x)+\chi(x)+\ldots)) = \mathbf{E}((\varphi(x))) + \mathbf{E}((\chi(x))) + \text{etc.}$$

$$(35)\quad {}_{x_0}^{\;X}\mathbf{E}_{y_0}^{Y}((\varphi(x)+\chi(x)+\ldots)) = {}_{x_0}^{\;X}\mathbf{E}_{y_0}^{Y}((\varphi(x))) + {}_{x_0}^{\;X}\mathbf{E}_{y_0}^{Y}((\chi(x))) + \text{etc.}$$

Auch ist

(36) $$E\frac{\varphi(x)+\chi(x)+\ldots}{((F(x)))}=E\frac{\varphi(x)}{((F(x)))}+E\frac{\chi(x)}{((F(x)))}+\text{etc.}$$

u. dgl.

Es sey ferner $f(x, z)$ eine Function der von einander unabhängigen veränderlichen Grössen x, z, und denken wir uns, die Gleichung

(37) $$\frac{1}{f(x, z)}=0$$

in Bezug auf x aufgelöst, biete Wurzeln dar, welche von z nicht abhängen. Bedeutet x_1 eine dieser Wurzeln, so wird der für $x=x_1$ genommene Rest der abgeleiteten Function $\frac{df(x, z)}{dz}$ von dem in Bezug auf z differenzirten Reste der Function $f(x, z)$ nicht verschieden seyn. Beide Grössen nämlich machen den Coefficienten des Bruches $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$ in den nach den steigenden Potenzen von ε und ε_1 geordneten Entwickelung von $f(x_1+\varepsilon, z+\varepsilon_1)$ aus. Da sich dieselbe Bemerkung auch auf die übrigen von z nicht abhängenden Wurzeln der Gleichung (37) anwenden lässt, so hat man

(38) $$E\left(\left(\frac{df(x, z)}{dz}\right)\right)=\frac{dE((f(x, z)))}{dz}$$

Es sey nun

(39) $$f(x, z)=\int_{z_0}^{z} F(x, z)\,dz\,.$$

wobei die Grössen unterhalb und oberhalb des Integralzeichens den Anfang und das Ende des Integrals bestimmen, und z_0 einen particulären Werth von z anzeigt, so ist

$$(40) \qquad \frac{df(x, z)}{dz} = F(x, z);$$

integrirt man daher die beiden Theile der Gleichung (38), indem man die Integrale für $z = z_0$ verschwinden lässt, so erhält man

$$(41) \int_{z_0}^{z} E((F(x, z)))dz = E\left(\left(\int_{z_0}^{z} F(x, z)\,dz\right)\right)$$

Durch dieselben Betrachtungen gelangt man auch zu den Formeln

$$(42) \quad \frac{d.\ {}_{x_0}^{X}\mathrm{E}_{y_0}^{Y}((f(x, z)))}{dz} = {}_{x_0}^{X}\mathrm{E}_{y_0}^{Y}\left(\left(\frac{df(x, z)}{dz}\right)\right)$$

$$(43) \int {}_{x_0}^{X}\mathrm{E}_{y_0}^{Y}((F(x, z)))dz = {}_{x_0}^{X}\mathrm{E}_{y_0}^{Y}((\int F(x, z)\,dz))$$

wobei die Integration in Bezug auf z beiderseits an die nämlichen Grenzen gebunden ist. Aus allen diesen Formeln erhellet, dass es erlaubt ist, unter dem Zeichen E eben so zu differenziren und zu integriren, wie unter dem Zeichen $\int$.

Schreibt man in der Formel (9) $x - x_1$ statt ε, und $\psi(x)$ statt $\frac{f^{(m)}(x_1 + \Theta\varepsilon)}{1.2.3\ldots m}$, so erhält man

$$(44) \qquad f(x) = \frac{f(x)}{(x - x_1)^m}$$

$$= \frac{f(x_1)}{(x - x_1)^m} + \frac{1}{1}\frac{f'(x_1)}{(x - x_1)^{m-1}} + \frac{1}{1.2}\frac{f''(x_1)}{(x - x_1)^{m-2}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\frac{f^{(m-1)}(x_1)}{x - x_1} + \psi(x).$$

Die in dieser letzteren Formel erscheinende Grösse

$\varphi(x)$ nimmt für $x = x_1$ im Allgemeinen einen endlichen Werth, nämlich

(45) $$\frac{f^{(m)}(x_1)}{1.2.3\ldots m}$$ an.

Aus der Formel (28) folgt ferner, wenn man $m+1$ statt m, und z statt x setzt:

(46) $$\frac{f^{(m)}(x_1)}{1.2.3\ldots m} = \mathrm{E}\frac{f(z)}{(((z-x_1)^{m+1}))}.$$

Diess vorausgesetzt hat man

(47) $$\frac{f(x_1)}{(x-x_1)^m} + \frac{1}{1}\frac{f'(x_1)}{(x-x_1)^{m-1}} + \frac{1}{1.2}\frac{f''(x_1)}{(x-x_1)^{m-2}} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\frac{f^{(m-1)}(x_1)}{x-x_1}$$

$$= \frac{1}{(x-x_1)^m}\mathrm{E}\frac{f(z)}{((z-x_1))} + \frac{1}{(x-x_1)^{m-1}}\mathrm{E}\frac{f(z)}{(((z-x_1)))} + \ldots + \frac{1}{x-x_1}\mathrm{E}\frac{f(z)}{(((z-x_1)^m))}$$

$$= \mathrm{E}\frac{f(z)}{(x-x_1)^m(((z-x_1)^m))}\Big((z-x_1)^{m-1} + (x-x_1)(z-x_1)^{m-2} + \ldots + (x-x_1)^{m-1}\Big)$$

$$= \mathrm{E}\frac{f(z)}{(x-x_1)^m(((z-x_1)^m))}\cdot\frac{(x-x_1)^m-(z-x_1)^m}{x-z}$$

$$= \mathrm{E}\frac{f(z)}{(x-z)(((z-x_1)^m))} - \frac{1}{(x-x_1)^m}\mathrm{E}\frac{(z-x_1)f(z)}{(x-z)(((z-x_1)))}$$

Das Symbol

$$\mathrm{E}\frac{(z-x_1)^m f(z)}{(x-z)(((z-x_1)^m))} = \mathrm{E}\frac{(z-x_1^m)f(z)}{(x-z)((z-x_1))}$$

stellt übrigens den Rest der Function

$$(48) \qquad \frac{f(z)}{x-z}$$

in Bezug auf $z = x_1$ vor; und da dieser Rest offenbar verschwindet, weil die Function (48) für $z = x_1$ einen endlichen Werth, nämlich $\frac{f(x)}{x-x_1}$ annimmt: so sind wir berechtiget zu schliessen, dass allgemein

$$(49) \quad \frac{f(x_1)}{(x-x_1)^m} + \frac{1}{1}\frac{f'(x_1)}{(x-x_1)^{m-1}} + \frac{1}{1.2}\frac{f''(x_1)}{(x-x_1)^{m-2}} + \ldots + \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}\frac{f^{(m-1)}(x_1)}{x-x_1} = E\frac{f(z)}{(x-z)(((z-x_1)^m))} \text{ ist.}$$

Man kann die Richtigkeit der Gleichung (49) durch die Bemerkung bestätigen, dass der zweite Theil derselben den Werth des Ausdruckes

$$(50) \qquad \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)} \frac{d^{m-1}\left(\frac{f(z)}{x-z}\right)}{dz}$$

für $z = x_1$ angibt.

Da andererseits $f(z) = (z-x_1)^m \mathcal{f}(z)$ ist, so geht der zweite Theil der Gleichung (49) in

$$E\frac{(z-x_1)^m \mathcal{f}(z)}{(x-z)(((z-x_1)^m))} = E\frac{(z-x_1)\mathcal{f}(z)}{(x-z)((z-x_1))}$$

über, und die Gleichung (44) gibt

$$(51) \qquad \mathcal{f}(x) - E\frac{(z-x_1)\mathcal{f}(z)}{(x-z)((z-x_1))} = \psi(x)$$

Aus dieser letzteren Gleichung erhellet, dass es, um aus einer Function $\mathcal{f}(x)$, welche für $x = x_1$ unendlich wird, eine andere Function zu bilden, der unter derselben Voraussetzung ein endlicher Werth

zukommt, hinreicht, von $f(x)$ eine Summe rationaler Brüche, nämlich

(52) $$\mathcal{E} \frac{(z-x_1)f(z)}{(x-z)((z-x_1))}$$

oder den in Bezug auf $z = x_1$ genommenen Rest der Function

(53) $$\frac{f(z)}{x-z}$$

zu subtrahiren.

Nehmen wir nun an, man wolle aus $f(x)$ eine andere Function ableiten, welche für keinen der partikulären Werthe $x = x_1$, $x = x_2$, etc. in den Zustand des unendlichen Wachsens übergeht, so hat man offenbar von $f(x)$ bloss die Summe der in Bezug auf $z = x_1$, $z = x_2$, etc. genommenen Reste der Function (53), d. h. den durch das Symbol

(54) $$\mathcal{E} \frac{((f(z)))}{x-z}$$

vorgestellten Integralrest abzuziehen.

Setzt man also

(55) $$f(x) - \mathcal{E} \frac{((f(z)))}{x-z} = \varpi(x)$$

so besitzt die Function $\varpi(x)$ die Eigenschaft, für $x = x_1$, $x = x_2$ etc., und folglich für alle reellen und imaginären Werthe der Veränderlichen x einen endlichen Werth anzunehmen.

In dem besonderen Falle, wenn $f(x)$ ein rationaler Bruch ist, kann $\varpi(x)$ auch nur ein solcher seyn, dessen Namen aber niemals verschwindet, d. h. $\varpi(x)$ ist ein rationaler Bruch, welcher eine constante Grösse, oder mit anderen Worten eine ganze Function von x zum Nenner hat. Diess vorausgesetzt, sey

$$(56) \qquad f(x) = \frac{\mathrm{f}(x)}{F(x)},$$

wobei f(x) und (F(x) zwei ganze Functionen bedeuten. Uebertrifft der Grad der zweiten jenen der ersten, so verschwindet die Function $f(x)$ für unendliche Werthe von x, und desshalb reducirt sich in der Gleichung (55) $\omega(x)$ auf Null. Man hat also unter diesen Umständen

$$(57) \qquad f(x) = \mathcal{E}\,\frac{((f(z)))}{x-z}$$

Die Formel (57) kann in allen denkbaren Fällen zur Zerlegung der gebrochenen rationalen Function $f(x)$ in ihre einfachen Partialbrüche gebraucht werden.

Es sey z. B. der Bruch $\frac{1}{(x-1)^2(x+1)}$ in Partialbrüche zu zerlegen. Die Formel (57) gibt

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+1)} = \mathcal{E}\,\frac{1}{(x-z)(((z+1)(z-1)^2))}$$
$$= \mathcal{E}\,\frac{1}{(x-z)(z-1)^2((z+1))}$$
$$+ \mathcal{E}\,\frac{1}{(x-z)(z+1)(((z-1)^2))}$$

Ferner ist, wenn ε eine unendlich klein werdende Grösse vorstellt, den Formeln (27) und (30) zu Folge

$$\mathcal{E}\,\frac{1}{(x-z)(z-1)^2((z+1))} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}$$

und
$$\mathcal{E}\,\frac{1}{(x-z)(z+1)(((z-1)^2))} = \frac{d\,\frac{1}{(2+\varepsilon)(x-1-\varepsilon)}}{d\varepsilon}$$
$$= -\frac{1}{(2+\varepsilon)^2}\cdot\frac{1}{x-1-\varepsilon} + \frac{1}{2+\varepsilon}\cdot\frac{1}{(x-1-\varepsilon)^2}$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}$$

Man findet demnach

(59) $$\frac{1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2}$$

Setzt man in (57) $\frac{f(x)}{F(x)}$ statt $f(x)$, und nimmt man, insofern m eine beliebige ganze Zahl bezeichnet

(60) $$F(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)$$

an, so ergibt sich

(61) $$\frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_m)}$$

$$= E\frac{f(z)}{(((z-x_1)z-x_2)\ldots(z-x_m)))}\cdot\frac{1}{x-z}$$

$$= E\frac{f(z)}{((z-x_1))(z-x_2)\ldots(z-x_m)}\cdot\frac{1}{x-z} + \text{etc.}$$

$$\ldots + E\frac{f(z)}{(z-x_1)(z-x_2)\ldots((z-x_m))}\cdot\frac{1}{x-z}$$

$$= \frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_m)}\cdot\frac{1}{x-x_1} + \text{etc.}$$

$$\ldots + \frac{f(x_m)}{(x_m-x_1)\ldots(x_m-x_{m-1})}\cdot\frac{1}{x-x_m}$$

folglich

(62) $$f(x) = \frac{(x-x_2)\ldots(x-x_m)}{(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_m)}f(x_1) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{m-1})}{(x_m-x_1)\ldots(x_m-x_{m-1})}f(x_m)$$

Diese letzte Gleichung stellt die Interpolationsformel von Lagrange dar.

Legt man, nach verrichteter Multiplication beider Theile der Gleichung (57) der Veränderlichen x einen

unendlich grossen Werth bei, und bezeichnet man den dieser Annahme entsprechenden Werth des Productes $xf(x)$ durch $\mathfrak{F}$, so erhält man die zwei Formeln

$$xf(x) = E \frac{((f(x)))}{1 - \frac{z}{x}}$$

und (63) $$\mathfrak{F} = E((f(z))) = 0$$

Verschwindet die Grösse $\mathfrak{F}$, so hat man geradezu

(64) $$E((fz))) = 0$$

Diese Formel besteht immer, wenn der Unterschied zwischen dem Grade des Nenners und jenem des Zählers im rationalen Bruche $f(x)$ die Einheit übersteigt. Sie stimmt mit einer im *Journal de l'École polytechnique* 18. cahier pag. 500 aufgestellten Gleichung überein. Setzt man $\frac{f(z)}{z-x}$ statt $f(x)$, so besteht sie auch in dem Falle, wenn die erwähnte Differenz der Einheit gleich wird. Man hat also dann

(65) $$E\left(\left(\frac{f(z)}{z-x}\right)\right) = f(x) - E\frac{((f(z)))}{x-z} = 0$$

was schon die Gleichung (57) lehrte.

Setzt man in den Formeln (63) und (64)

$$f(x) = \frac{x^n}{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x)_m}$$

so ergibt sich der bereits aus anderen Gründen bekannte Satz, dass die Summe

(66) $$\frac{x_1^n}{(x_1-x_2)\dots(x_1-x_m)} + \frac{x_2^n}{(x_2-x_1)\dots(x_2-x_m)}$$
$$+ \dots + \frac{x_m^n}{(x_m-x_1)\dots(x_m-x_{m-1})}$$

gleich Null wird, sobald $n < m - 1$ ist, und $= 1$, sobald $n = m - 1$ ist.

Die unter der Voraussetzung, dass $f(x)$ einen rationalen Bruch ausdrückt, erhaltenen Gleichungen (57), (63) und (64) bestehen noch in vielen anderen Fällen, wie in der Folge, wo wir es mit den vorzüglichsten Anwendungen des Calculs der Reste zu thun haben werden, gezeigt werden soll.

III. Ueber die Anwendung des im vorhergehenden Aufsatze vorgetragenen neuen Calculs auf die Summirung einiger Reihen.

(Exercices de Mathématiques par M. A. L. Cauchy, p. 46 etc.)

Es seyen $f(x, z)$, $F(x, z)$ zwei gegebene Functionen der Veränderlichen x, z, und n eine beliebige ganze Zahl. Man denke sich das Product

$$[f(x, z) + f(z, x)]^n F(x, z)$$

nach dem binomischen Lehrsatze entwickelt, und jedes Glied des erhaltenen Ausdruckes n Mal differenzirt, nämlich das erste Glied n Male in Bezug auf x; das zweite $(n-1)$ Mal in Bezug auf x, und ein Mal in Bezug auf z; das dritte $(n-2)$ Mal in Bezug auf x, und zwei Mal in Bezug auf z u. s. w.; endlich das letzte Glied n Mal in Bezug auf z. Setzt man der Kürze halber

(1) $\quad f(x, z) = u, \; f(z, x) = v, \; F(x, z) = w$

so erhält man durch dieses Verfahren die Reihe

$$(2)\ \frac{d^n(u^n w)}{dx^n},\ \frac{n}{1}.\frac{d^n(u^{n-1}vw)}{dx^{n-1}dz},\ \frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{d^n(u^{n-2}v^2w)}{dx^{n-2}dz^2}\ \text{etc.}$$

$$\ldots\frac{d^n(v^n w)}{dz^n}$$

deren Summe unbekannt ist. Der Calcul der Reste bietet ein Mittel an die Hand, diese Summe in dem Falle leicht zu bestimmen, wenn man nach dem Differenziren $z = x$ nimmt, wie wir sogleich zeigen werden.

Es sey s ein gemeinschaftlicher Werth der Veränderlichen x, z, und S der ihm correspondirende Werth der Summe der Glieder, welche die Reihe (2) bilden, so dass

$$(3)\quad S = \frac{d^n(u^n w)}{dx^n} + \frac{n}{1}.\frac{d^n(u^{n-1}vw)}{dx^{n-1}dz} + \frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{d^n(u^{n-2}v^2w)}{dx^{n-2}dz^2} + \ldots + \frac{d^n(v^n w)}{dz^n}$$

ist, wenn man nach verrichteten Differenziationen $z = x = s$ nimmt. Die Formel (28) in I. führt uns auf die Gleichung

$$\frac{1}{1.2.3\ldots m.1.2.3\ldots(n-m)}\frac{d^n(u^m v^{n-m} w)}{dx^m dz^{n-m}} = EE\frac{u^m v^{n-m} w}{(((x-s)^{m+1}))\,(((z-s)^{n-m+1}))}$$

in welcher sich eines der Zeichen E auf die Veränderliche x und das andere auf z bezieht, und desshalb kann folgende Gleichung

$$(4)\qquad S = 1.2.3\ldots n\left\{EE\frac{u^n w}{(((x-s)^{n+1}))\,((z-s))}\right.$$

$$+ EE\frac{u^{n-1}vw}{(((x-s)^n))\,(((z-s)^2))} + \ldots\ldots$$

$$\left.\ldots + EE\frac{v^n w}{((x-s))\,(((z-s)^{n+1}))}\right\}$$

an die Stelle der Formel (3) treten. Anderer Seits ist der bekannten Summirungsformel einer geometrischen Progression zufolge,

$$\frac{u^n}{(x-s)^{n+1}(z-s)} + \frac{u^{n-1}v}{(x-s)^n(z-s)^2} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{v^n}{(x-s)\,(z-s)^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{(x-s)^{n+1}(z-s)^{n+1}}\cdot\frac{u^{n+1}(z-s)^{n+1} - v^{n+1}(x-s)^{n+1}}{u(z-s) - v(x-s)}$$

Daher gibt die Gleichung (4)

$$(5)\ S = 1.2.3\ldots n EE\frac{wu^{n+1}(z-s)^{n+1} - wv^{n+1}(x-s)^{n+1}}{[u(z-s) - v(x-s)](((x-s)^{n+1}))(((z-s)^{n+1}))}$$

Es sey ferner

$$(6)\ \ldots\ldots\frac{d\,f(x,z)}{dx} = \varphi(x,z),\ \frac{d\,f(x,z)}{dz} = \chi(x,z).$$

Betrachtet man in dem Ausdrucke

$$\frac{wu^{n+1}}{u(z-s) - v(x-s)} = \frac{[f(x,z)]^{n+1}F(x,z)}{(z-s)\,f(x,z) - (x-s)\,f(z,x)}$$

z allein als veränderlich, so stellt dieser Ausdruck eine für $z = x$ unendlich gross werdende Function

dar, deren auf den genannten Werth von z sich beziehender Rest

$$(8) \quad \frac{[f(x,x)]^{n+1}F(x,x)}{f(x,x)-(x-s)\,[\varphi(x,x)-\chi(x,x)]}$$

ist. Theilt man diesen Rest durch $z-x$, zieht man den erhaltenen Quotienten von dem Ausdrucke (7) ab, und nennt man die sich dabei ergebende Differenz $\omega(x, z)$, d. h. setzt man

$$(9) \quad \frac{wu^{n+1}}{u(z-s)-v(x-s)} = \frac{[f(x,x)]^{n+1}F(x,x)}{f(x,x)-(u-s)[\varphi(x,x)-\chi(x,x)]}\cdot\frac{1}{z-x} + \omega(x,z)$$

so nimmt die Function $\omega(x, z)$ den in I. aufgestellten Sätzen zu Folge unter der Voraussetzung $z = x$ für jeden Werth von x, also auch für $z = x = s$ einen endlichen Werth an. Auf demselben Wege gelangt man auch zu der Gleichung

$$(10) \quad \frac{wv^{n+1}}{u(z-s)-v(x-s)} = \frac{[f(x,x)]^{n+1}F(x,x)}{f(x,x)-(x-s)[\varphi(x,x)-\chi(x,x)]}\cdot\frac{1}{z-x} + \psi(x,z)$$

wobei $\psi(x, z)$ gleichfalls eine Function anzeigt, welche für $z = x = s$ einen endlichen Werth erhält. Mit Hülfe der Gleichungen (9) und (10) bekömmt die Formel (5) folgende Gestalt:

$$(11)\qquad S = 1.2.3\ldots n\,EE\,\frac{[f(x,x)]^{n+1}\,F(x,x)}{f(x,x)-(x-s)\,[\varphi(x,x)-\chi(x,x)]}\cdot\frac{1}{z-x}\cdot\frac{(z-s)^{n+1}-(x-s)^{n+1}}{(((x-s)^{n+1}))\,(((z-s)^{n+1}))}$$

$$+\,1.2.3\ldots n\,EE\,\omega(x,z)\cdot\frac{(z-s)^{n+1}}{(((x-s)^{n+1}))\,(((z-s)^{n+1}))}$$

$$-\,1.2.3\ldots n\,EE\,\psi(x,z)\cdot\frac{(x-s)^{n+1}}{(((x-s)^{n+1}))\,(((z-s)^{n+1}))}$$

Anderseits hat man offenbar

$$(12)\qquad E\,\omega(x,z)\,\frac{(z-s)^{n+1}}{(((z-s)^{n+1}))}=0,\quad E\,\psi(x,z)\,\frac{(x-s)^{n+1}}{(((x-s)^{n+1}))}=0$$

$$(13)\qquad E\,\frac{(z-s)^{n+1}-(x-s)^{n+1}}{z-x}\cdot\frac{1}{(((z-s)^{n+1}))}=1$$

Daher gibt die Formel (11)

$$(14)\qquad S = 1.2.3\ldots n\,E\,\frac{[f(x,x)]^{n+1}\,F(x,x)}{f(x,x)-(x-s)\,[\varphi(x,x)-\chi(x,x)]\,(((x-s)^{n+1}))}$$

oder was dasselbe ist

$$(15)\quad \mathfrak{S} = \frac{d^n \cdot \dfrac{[f(x,x)]^{n+1} F x, x)}{f(x,x)-(x-s)\,[\varphi(x,x)-\chi(x,x)]}}{dx^n}$$

vorausgesetzt, dass man nach dem Differenziren $x = s$ nimmt. Schreibt man in der Formel (15) z statt s, und das zweite Glied der Gleichung (3) statt S, so hat man die Formel

$$(16)\quad \frac{d^n(u^n w)}{dx^n} + \frac{n}{1} \cdot \frac{d^n(n^{n-1} v w)}{dx^{n-1} dz} + \ldots + \frac{n}{1} \frac{d^n(u v^{n-1} w)}{dx\, dz^{n-1}} + \frac{d^n(v^n w)}{dz^n}$$

$$= \frac{d^n \cdot \dfrac{[f(x,x)]^{n+1} F(x,x}{f(x,x)-(x-z)\,[\varphi(x,x)-\chi(x,x)]}}{dx^n}$$

deren Richtigkeit jedoch fordert, dass man nach verrichtetem Differenziren $z = x$ setze.

Um eine Anwendung der Formel (16) zu zeigen, seyen

$$U, V, P, Q$$

vier Functionen der veränderlichen Grösse x, welche sich, wenn man z statt x setzt, in

$$\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{P}, \mathfrak{Q}$$

verwandeln. Lässt man nun

$$(17)\qquad u = U\mathfrak{V},\ v = V\mathfrak{U},\ w = P\mathfrak{Q}$$

seyn, und stellt man nach dem Differenziren den Buchstaben z an den Platz von x, so reducirt sich der erste Theil der Formel (16) zunächst auf das Polynom

$$\mathfrak{B}^n\mathfrak{Q}\,\frac{d^n(U^nP)}{dx^n}+\frac{n}{1}\,\frac{d(\mathfrak{U}\mathfrak{B}^{n-1}\mathfrak{Q})}{dz}\,\frac{d^{n-1}(U^{n-1}VP)}{dx^{n-1}}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{n}{1}\,\frac{d(UV^{n-1}P)}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}(\mathfrak{U}^{n-1}\mathfrak{B}\mathfrak{Q})}{dx^{n-1}}+V^nP\,\frac{d^n(\mathfrak{U}^n\mathfrak{Q})}{dz^n}$$

welches die zwei Veränderlichen x und z enthält; sodann auf das Polynom

$$V^nQ\,.\frac{d^n(U^nP)}{dx^n}+\frac{n}{1}\cdot\frac{d(UV^{n-1}Q)}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}(U^{n-1}VP)}{dx^{n-1}}+$$

$$\ldots+\frac{n}{1}\,\frac{d(UV^{n-1}P)}{dx}\cdot\frac{d^{n-1}(U^{n-1}VQ)}{dx^{n-1}}+V^nP\,\frac{d^n(U^nQ)}{dx^n}$$

worin bloss x erscheint. Ferner hat man

$$\varphi(x,\,z)=\frac{du}{dx}=\mathfrak{B}\frac{dU}{dx},\quad \chi(x,\,z)=\frac{du}{dz}=\mathfrak{U}\frac{dV}{dz}$$

folglich $\varphi\,(x,\,x)=V\dfrac{dU}{dx},\ \chi(x,\,x)=U\dfrac{dV}{dx}$,

wodurch der zweite Theil der Formel (16) offenbar in

$$\frac{1}{dx^n}\cdot d^n\cdot\frac{n^nv^nPQ}{1-(x-z)\left(\frac{1}{U}\frac{dU}{dx}-\frac{1}{V}\frac{dV}{dx}\right)}$$

übergeht. Daher gibt die Formel (16)

$$(18)\quad V^nQ\,\frac{d^n(U^nP)}{dx^n}+\frac{n}{1}\,\frac{d(U^{V_{n}-1}Q)}{dx}\cdot\frac{d(U^{n-1}VP)}{dx^{n-1}}$$

$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\,\frac{d^2(U^2V^{n-2}Q)}{dx^2}\cdot\frac{d^{n-2}(U^{n-2}V^2P)}{dx^{n-2}}$$

$$+\ldots+\frac{n}{1}\,\frac{d(UV^{n-1}P)}{dx}\,\frac{d^{n-1}(U^{n-1}VQ)}{dx^{n-1}}+V^nP\,\frac{d^n(U^nQ)}{dx^n}$$

$$=\frac{1}{dx^n}d^n\cdot\frac{U^nV^nPQ}{1-(x-z)\left(\frac{1}{U}\frac{dU}{dx}-\frac{1}{V}\frac{dV}{dx}\right)}$$

Diese letztere Gleichung besteht, wie immer die durch P, Q, U, V vorgestellten Functionen beschaffen seyn mögen, wenn nur in dem zweiten Theile derselben nach dem Differenziren $z = x$ gesetzt wird.

Lässt man in (18) $U = 1$, $V = 1$ seyn, so zeigt sich die bekannte Gleichung

$$(19)\quad Qd^nP + \frac{n}{1}dQ \cdot d^{n-1}P + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}d^2Q \cdot d^{n-2}P$$

$$\ldots\ldots + \frac{n}{1}dP \cdot d^{n-1}Q + Pd^nQ = d^n(PQ).$$

Nimmt man aber in (18)

$$U = W^\alpha,\ V = W^\beta,\ P = W^\gamma,\ Q = W^\delta$$

indem W eine Function von x bedeutet, und α, β, γ, δ was immer für Zahlen sind; setzt man ferner der Kürze wegen

$$\alpha - \beta = a,\ n\alpha + \gamma = r,\ n\alpha + \delta = s$$

so ergibt sich

$$(20)\quad W^{s-na}\frac{d^n(W^r)}{dx^n} + \frac{n}{1} \cdot \frac{d(W^{s-(n-1)a})}{dx} \cdot \frac{d^{n-1}(W^{r-a})}{dx^{n-1}}$$

$$\ldots + \frac{n}{1}\frac{d(W^{r-(n-1)a})}{dx}\frac{d^{n-1}(W^{s-a})}{dx} + W^{r-na}\frac{d^n(W^s)}{dx^n}$$

$$= \frac{1}{dx^n}d^n \cdot \frac{W^{r+s-na}}{1 - a(x-z)\frac{1}{W}\frac{dW}{dx}}$$

Man kommt zu dieser Formel auch, wenn man in (18) $U = 1$, $V = W^{-a}$, $P = W^r$, $Q = W^s$ schreibt.

Es werde nun in (20) $W = e^x$ gesetzt. Theilt man beide Theile dieser Gleichung durch $e^{(r+s-na)x}$, so findet man

$$r^n + \frac{n}{1}(r-a)^{n-1}[s-(n-1)a]$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}(r-2a)^{n-2}[s-(n-2)a]^2 + \ldots\ldots$$
$$\ldots + \frac{n}{1}(s-a)^{n-1}[r-(n-1)a] + s^n$$
$$= e^{(r+s-na)x} \cdot \frac{d^n([1-a)(x-z)]^{-1} e^{(r+s-na)x})}{dx^n}$$

wodurch man mit Berücksichtigung der Gleichung (19), nachdem man nach dem Differenziren $z = x$ gesetzt hat, auf die Formel

$$(21)\quad r^n + \frac{n}{1}(r-a)^{n-1}[s-(n-1)a]$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}(r-2a)^{n-2}[s-(n-2)a]^2 + \ldots\ldots$$
$$\ldots + \frac{n}{1}(s-a)^{n-1}[r-(n-1)a] + s^n$$
$$= (r+s-na)^n + na(r+s-na)^{n-1}$$
$$+ n(n-1)a^2(r+s-na)^{n-2} + \ldots 1.2.3\ldots n.a^n$$

kommt. Es sey in dieser letztern $r = ax$, $s = ay$, so verwandelt sie sich in

$$(22)\quad x^n + \frac{n}{1}(x-1)^{n-1}(y-n+1)$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}(x-2)^{n-2}(y-n+2)^2 + \ldots$$
$$\ldots\ldots + \frac{n}{1}(x-1)^{n-1}(y-n+1) + y^n$$
$$= (x+y-n)^n + n(x+y-n)^{n-1}$$
$$+ n(n-1)(x+y-n)^{n-2} + \ldots + 1.2.3\ldots n.$$

Die Gleichung (22) verdient beachtet zu werden. Nimmt man in derselben $x + y = n$, so gibt sie die bekannte Formel

$$(23)\ x^n - \frac{n}{1}(x-1)^n + \frac{n(n-1)}{1.2}(x-2)^n - \ldots.$$
$$\pm (x-n)^n = 1.2.3\ldots n.$$

Setzt man aber $x + y = n + 1$, so findet man

$$(24)\ x^n - \frac{n}{1}(x-1)^{n-1}(x-2)^{n-2}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}(x-2)^{n-2}(x-3)^2 - \ldots \pm (x-n-1)^n$$
$$= 1 + n + n(n-1) + n(n-1)(n-2) + \ldots + 1.2.3..n.$$

Es sey ferner in (20) $W = x$, so hat man, wenn man beiderseits durch $x^{r+s-n(a+1)}$ theilt,

$$r(r-1)\ldots(r-n+1) + \frac{n}{1}(r-a)(r-a-1)..$$
$$\ldots(r-a-n+2)[s-(n-1)a] + \text{etc.}$$
$$+ \frac{n}{1}(s-a)(s-a-1)\ldots(s-a-n+z)[r-(n-1)a]$$
$$+ s(s-1)\ldots(s-n+1)$$
$$= x^{-r-s+n(a+1)} \frac{d^n([az-(a-1)x]^{-1}x^{r+s-n(a+1)})}{dx^n}$$

daher, wenn man auf (19) Rücksicht nimmt, und nach dem Differenziren $z = x$ setzt:

$$(25)\ r(r-1)\ldots(r-n+1) + \frac{n}{1}(r-a)(r-a-1)\ldots$$
$$\ldots(r-a-n+2)[s-(n-1)a] + \ldots\ldots$$
$$\ldots + \frac{n}{1}(s-a)(s-a-1)\ldots(s-a-n+2)[r-(n-1)a]$$
$$+ s(s-1)\ldots(s-n+1)$$
$$= (r+s-na+1)(r+s-na)\ldots(r+s-na-n+2)$$
$$+ n(a-1)(r+s-na+1)\ldots\ldots(r+s-na-n+3)$$
$$+ n(n-1)(a-1)^2(r+s-na+1)\ldots(r+s-na-n+4)$$
$$+ \ldots + 1.2.3\ldots n(a-1)^n.$$

Die Voraussetzung $a=1$, $r-n+1=x$, $s-n+1=y$ führt auf die bekannte Formel

$$(26)\quad x(x+1)\ldots(x+n-1)+\frac{n}{1}x(x+1)\ldots$$
$$\ldots(x+n-2)+\frac{n(n-1)}{1.2}x(x+1)\ldots(x+n-3)y(y+1)$$
$$+\ldots+\frac{n}{1}xy(y+1)\ldots(y+n-2)+y(y+1)\ldots(y+n-1)$$
$$=(x+y)(x+y-1)\ldots(x+y-n+1);$$

die Annahme

$$r=x,\ a=h+1,\ s+r=na-1$$

hingegen gibt

$$(27)\quad x(x-1)\ldots(x-n+1)-\frac{n}{1}(x-h)(x-h-1)\ldots(x-h-n+1)$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}(x-2h)(x-2h-1)\ldots(x-2h-n+1)-\ldots$$
$$\ldots\ldots\pm(x-nh)(x-nh-1)\ldots(x-nh-n-1)$$
$$=1.2.3\ldots n.h^n$$

eine Formel, welche auch leicht durch den Differenzen-Calcul begründet wird und von der Gleichung

$$(28)\quad \Delta^n.(x-nh)(x-nh-1)\ldots(x-nh-n+1)=1.2.3\ldots n.\Delta x^n$$

unter der Voraussetzung $\Delta x=h$, nicht verschieden ist.

Kehren wir zur Gleichung (18) zurück, und schreiben wir in derselben $\frac{P}{V^n}$ statt P, $\frac{Q}{V^n}$ statt Q, VW statt U, so haben wir

$$(29)\quad Q\frac{d^n(W^nP)}{dx^n}+\frac{n}{1}\frac{d(WQ)}{dx}.\frac{d^{n-1}(W^{n-1}P)}{dx^{n-1}}$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^2(W^2Q)}{dx^2}.\frac{d^{n-2}(W^{n-2}P)}{dx^{n-2}}$$
$$+\ldots+\frac{n}{1}\frac{d(WP)}{dx}.\frac{d^{n-1}(W^{n-1}Q)}{dx^{n-1}}+\frac{Pd^n(W^nQ)}{dx^n}$$

$$= \frac{1}{dx^n} \cdot d^n \frac{PQW^n}{1 - (x - z)\frac{dW}{Wdx}}$$

Nehmen wir, in so fern s eine beliebige Grösse und R eine Function der Veränderlichen x bezeichnet,

$$P = R\left(1 - (x - s)\frac{dW}{Wdx}\right)$$

an. Nichts hindert uns nach dem Differenziren $s = x$ zu setzen, oder, was dasselbe ist, vor dem Differenziren $s = z$. Die Gleichung (29) gibt uns hiebei

$$(31) \qquad \frac{d^n(QRW^n)}{dx^n} =$$

$$Q\frac{d^n(W^nR)}{dx^n} + \frac{n}{1}\frac{d(WQ)}{dx} \cdot \frac{d^{n-1}(W^{n-1}R)}{dx^{n-1}} + \ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{n}{1}\frac{d(WR)}{dx}\frac{d^{n-1}(W^{n-1}Q)}{dx^{n-1}} + R\frac{d^n(W^nQ)}{dx^n}$$

$$- Q\frac{d^n\left((x-z)W^{n-1}R\frac{dW}{dx}\right)}{dx^n} - \frac{n}{1}\frac{d(WQ)}{dx}$$

$$\cdot \frac{d^{n-1}\left((x-z)W^{n-2}R\frac{dW}{dx}\right)}{dx^{n-1}}$$

$$- \ldots - \frac{n}{1}\frac{d^{n-1}(W^{n-1}Q)}{dx^{n-1}} \cdot \frac{d\left((x-z)R\frac{dW}{dx}\right)}{dx}$$

wenn nach dem Differenziren x an die Stelle von z tritt. Unter dieser Bedingniss aber ist allgemein vermöge der Formel (19)

$$\frac{d^m((x-z)f(x))}{dx^m} = m\frac{d^{m-1}f(x)}{dx^{m-1}}$$

und folglich,

$$\frac{d^m(W^mR)}{dx^m} - \frac{d^m\left((x-z)W^{m-1}R\frac{dW}{dx}\right)}{dx^m}$$

$$= \frac{d^m(W^mR)}{dx^m} - m\frac{d^{m-1}\left((W^{m-1}R\frac{dW}{dx}\right)}{dx^{m-1}}$$

$$= \frac{d^{m-1}(W^mR')}{dx^{m-1}}$$

wobei R′ den Differenzialquotienten $\frac{dR}{dx}$ anzeigt. Es kann demnach die Gleichung (31) auf

$$(32)\quad \frac{d^n(QRW^n)}{dx^n} = Q\frac{d^{n-1}(W^nR')}{dx^{n-1}}$$
$$+\frac{n}{1}\frac{d(WQ)}{dx}\cdot\frac{d^{n-2}(W^{n-1}R')}{dx^{n-2}} + \ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots + \frac{n}{1}WR'\frac{d^{n-1}(W^{n-1}Q)}{dx^{n-1}} + R\frac{d^n(W^nQ)}{dx^n}$$

zusammengezogen werden. Vertauscht man hier Q und R gegen einander, so hat man auch

$$(33)\quad \frac{d^n(QRW^n)}{dx^n} = Q\frac{d^n(W^nR)}{dx^n} + \frac{n}{1}WQ'\frac{d^{n-1}(W^{n-1}R)}{dx^{n-1}} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n}{1}\frac{d(WR)}{dx}\cdot\frac{d^{n-2}(W^{n-1}Q')}{dx^{n-2}} + R\frac{d^{n-1}(W^nQ')}{dx^{n-1}}$$

Setzt man endlich in (32) QW′ statt Q, und n — 1 statt n, so ergibt sich

$$(34)\quad \frac{d^{n-1}(QRW^{n-1}W')}{dx^{n-1}} = QW'\frac{d^{n-2}(W^{n-1}R')}{dx^{n-2}} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n-1}{1}WR'\frac{d^{n-2}(W^{n-2}QW')}{dx^{n-2}} + R\frac{d^{n-1}(W^{n-1}QW')}{dx^{n-1}}$$

und wenn man (34) mit n multiplicirt, und von (32) abzieht

$$(35)\quad \frac{d^{n-1}\left(W^n\frac{d(QR)}{dx}\right)}{dx^{n-1}} = Q\frac{d^{n-1}(W^nR')}{dx^{n-1}}$$

$$+\frac{n}{1}WQ'\frac{d^{n-2}(W^{n-1}R')}{dx^{n-2}} + \ldots + \frac{n}{1}WR'\frac{d^{n-2}(W^{n-1}Q')}{dx^{n-2}}$$

$$+ R\frac{d^{n-1}(W^nQ')}{dx^{n-1}}$$

Man kann diese Formeln leicht dadurch prüfen, dass man der ganzen Zahl n besondere Werthe, z. B. 1, 2, 3, ... beilegt.

Setzt man in (34) und (35)

$$Q = e^{rx},\ R = e^{sx},\ W = e^x$$

so erhält man

$$(36)\quad \frac{(r+s+n)^n - (r+n)^n}{s} = (s+n)^{n-1}$$

$$+\frac{n}{1}(r+1)(s+n-1)^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2}(r+2)^2(s+n-2)^{n-3}$$

$$\ldots + \frac{n}{1}(r+n-1)^{n-1}$$

und

$$(37)\quad \frac{(r+s)(r+s+n)^{n-1} - (r+n)^{n-1} - s(s+n)^{n-1}}{rs}$$

$$= \frac{n}{1}(s+n-1)^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2}(r+2)(s+n-2)^{n-3}$$

$$+ \ldots + \frac{n}{1}(r+n-1)^{n-2}.$$

Die Gleichung (37) gibt für $s = r$

$$(38) \qquad 2\frac{(2r+n)^{n-1} - (r+n)^{n-1}}{r}$$

$$= \frac{n}{1}(r+n-1)^{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2}(r+2)(r+n-2)^{n-3}$$

$$+ \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}(r+n-2)^{n-3}(r+2) + \frac{n}{1}(r+n-1)^{n-2}$$

und wenn hier $r = o$ ist

$$(39) \qquad 2(n-1)n^{n-2} = \frac{n}{1}(n-1)^{n-2}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}2^1(n-2)^{n-3} + \ldots + \frac{n(n-1)}{1.2}.(n-2)^{n-3}2^1$$

$$+ \frac{n}{1}(n-1)^{n-2}$$

Setzt man in (35)

$$Q = x^r, \; R = x^s, \; W = x^a$$

so findet man

$$(40) \quad \left. \begin{array}{l} (r+s)(r+s+an-n+1)\ldots\ldots(r+s+an-1) \\ -\, r(r+an-n+1)\ldots\ldots\ldots\ldots(r+an-1) \\ -\, s(s+an+1)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(s+an-1) \end{array} \right\} : rs$$

$$= \frac{n}{1}[s+(n-1)a-1] \ldots\ldots [s+(n-1)a-n+2] \,.$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}[s+(n-2)a-1] \ldots\ldots [s+(n-2)a-n+3]$$

$$(r+2a-1)$$

$$+ \text{etc.} + \frac{n}{1}[r+(n-1)a-1] \ldots\ldots [r+(n-1)a-n+2]$$

Wird in (40) $a = 1$, $r = x$, $s = y$, so entsteht die Formel (26).

IV. Ueber den Gebrauch der Methode der unbestimmten Coefficienten bei der Entwickelung der Potenzen des Cosinus eines Bogens nach den Cosinussen seiner Vielfachen.

Die Methode der unbestimmten Coefficienten besteht bekanntlich darin, dass man eine zu entwickelnde Function einer unendlichen Reihe gleich setzt, in welcher ein gewisses Bildungsgesetz herrscht, und deren einzelne Glieder mit unbestimmten Coefficienten versehen sind, auf deren nähere Bestimmung es allein noch ankommt. Man substituirt zu diesem Ende die angenommene Reihe statt der Function, welche sie vorstellen soll, in einer nach den Eigenschaften dieser Function entworfenen Differenzial- oder auch endlichen Gleichung, betrachtet die sich hiedurch ergebende Gleichung als eine identische, und erlaubt sich desshalb die Coefficienten gleichartiger Glieder diesseits und jenseits des Gleichheitszeichens einander gleich zu setzen. Auf diese Art gelangt man zu einer unendlichen Menge von Gleichungen, mit deren Hülfe die Werthe der noch unbekannten Coefficienten ausgemittelt werden. Meistens erhält man aus denselben ohne Mühe eine allgemeine Recursionsformel zwischen den zu berechnenden Coefficienten, welche die Werthe jedes späteren durch die Werthe einiger

früheren ausdrückt, so zwar dass, sobald man den Werth des ersten Coefficienten aus der Beschaffenheit der zur Entwickelung vorgelegten Function erkannt hat, die Bestimmung der folgenden keiner Schwierigkeit unterliegt. Lassen sich die Coefficienten wirklich finden, so sieht man die Gleichung zwischen der Function und der Reihe als unwidersprechlich bewiesen an; ergeben sich aber bei der Bestimmung der Coefficienten Ungereimtheiten, so zieht man daraus den Schluss, dass die angenommene Form der Reihe auf die gegebene Function nicht passt.

Im Geiste dieser Methode setzt Lagrange (*Leçons sur le calcul des fonctions. Leçon 11ème*)

$$y = (\cos x)^m = A\cos nx + B\cos(n-1)x + C\cos(n-2)x + D\cos(n-3)x + \text{etc.}$$

wobei A, B, C, D etc. unbestimmte von x independente Coefficienten anzeigen, und substituirt diese Reihe für y in die aus $y = (\cos x)^m$ leicht folgende Gleichung

$$my\sin x + \frac{dy}{dx}\cos x = 0$$

Nach vollbrachter Umstaltung der in dem erhaltenen Resultate vorkommenden Producte der Sinusse und Cosinusse in Summen von Sinussen, und Zusammenziehung aller homogenen Glieder, kommt er auf eine der Nulle gleiche, nach den Grössen $\sin(n+1)x$, $\sin nx$, $\sin(n-1)x$, $\sin(n-2)x$ etc. fortschreitende Reihe, die er als identisch verschwindend betrachtet, und aus welcher er die Gleichungen

$$(m-n)A=0, (m-n+1)B=0, (m-n+2)C-(m+n)A=0$$
$$(m-n+3)D-(m+n-1)B=0, \text{ u. s. w.}$$

folgert. Die erste derselben gibt $n = m$; aus den

übrigen findet man $B = o$, $C = \frac{2m}{2} A$, $D = \frac{2m-1}{3} B$,

$$E = \frac{2m-2}{4} C, \text{ etc.}$$

also $B = o$, $D = o$, $F = o$, etc.

und $C = mA$, $E = \frac{m(m-1)}{2}$, $G = \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} A$ etc.

Dem zu Folge hält sich Lagrange für berechtiget

$$(1) \quad (\cos x)^m = A\Big(\cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)x + \ldots\Big)$$

zu setzen, wobei noch A zu bestimmen übrig ist.

Die Annahme $x = o$ verhilft ihm hierzu; er findet

$$1 = A\Big(1 + m + \frac{m(m-1)}{2} + \text{etc.}\Big) = A(1+1)^m$$

also $A = \frac{1}{2^m}$ und daher

$$(\cos x)^m = \frac{1}{2^m}\Big(\cos mx + m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)x + \ldots\Big)$$

welche Formel er für jeden Werth von m gelten lässt.

Dass dieses Resultat keinesweges die erforderliche Allgemeinheit besitzt, haben wir bereits im ersten Hefte angeführt, auch sind die Schwierigkeiten, welche man in dem Gebrauche der Differenzial-Rechnung bei dieser Entwickelung zu finden glaubte, aus den, im 3ten Bande der zweiten Ausgabe von Lacroix grösserem Werke über Differenzial- und

Integralrechnung befindlichen, Zusätzen zu dem ersten Bande desselben hinreichend bekannt.

Auf eine sinnreiche Art hat sich Poinsot geholfen (*Recherches sur l'analyse des sections angulaires. Paris* 1825. *pag.* 60 etc.). Er erklärt die Unvollständigkeit des Resultates für eine Folge der unvollständigen Bestimmung der Constante A.

Wenn man nämlich in der allgemeinen Gleichung (1) $x = 0$ seyn lässt, so folgt daraus nicht bloss $1 = A\,(1+1)^m$, oder $A = \frac{1}{2^m}$, sondern vielmehr $(1)^m = A \cos m0 \,.\, (1+1)^m$, wobei der Factor $\cos m0$, wenn m keine ganze Zahl bedeutet, nicht nur den Werth 1, sondern auch noch die Werthe $\cos 2m\pi$, $\cos 4m\pi$, $\cos 6m\pi$ u. s. w. besitzt, und daher muss $A = \frac{(1)^m}{2^m \cos m0}$ gesetzt werden, in welchem Bruche der Nenner $\cos m0$ im Allgemeinen eine vieldeutige Grösse ist. Die hier angeführten verschiedenen Werthe von $\cos m0$ correspondiren den verschiedenen Werthen von $\cos mx$, $\cos(m-2)x$ etc.

Nimmt man ferner zur Bestimmung von A, statt $x = 0$ zu setzen, $x = \pi$ an, so erhält man $A = \frac{(-1)^m}{2^m \cos m\pi}$. Poinsot drückt desshalb den Werth von A folgender Massen aus:

$$A = \frac{(\pm 1)^m}{2^m \cos(m . \text{Arc.}\cos \pm 1)}$$

und bezieht das obere Zeichen auf den Fall, wenn $\cos x$ positiv, und das untere auf jenen, wenn $\cos x$

negativ ist. Nach ihm ist also

$$(2)\quad (2\cos x)^m = \frac{(\pm 1)^m}{\cos(m\,\text{Arc.}\cos \pm 1)}\Big(\cos mx$$

$$+ m\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)x + \text{etc.}\Big)$$

die richtige auf jeden Werth von m und x anwendbare Formel. Bei dem Gebrauche derselben ist zu bemerken, dass zu dem kleinsten Werthe von Arc. cos ± 1 die Peripherie 2π so oft hinzugesetzt werden muss, als sie in x enthalten ist, wie aus der Bestimmung von A erhellet.

Die Gleichung (2) umfasst die im ersten Hefte Seite 106 erhaltenen Gleichungen (8) und (9) als besondere Fälle.

Allein so scharfsinnig auch Poinsot's Deduction der an sich betrachtet völlig untadelhaften Formel (2) seyn mag, so steht sie, wie Poisson (*Bulletin des sciences mathématiques. Tom IV.* 1825. *pag.* 147 *et* 345) bemerkt, nicht auf sicherem Grunde. Es gewährt nämlich die Methode der unbestimmten Coefficienten bei der Entwickelung der Functionen in Reihen, welche nach periodischen Grössen, wie die Kreisfunctionen sind, fortschreiten, nicht die Sicherheit, mit welcher sie bei der Transformation der Functionen in Reihen angewendet werden kann, die nach den Potenzen einer Veränderlichen geordnet erscheinen, und diese Bemerkung enthält den Schlüssel zur Aufklärung aller Schwierigkeiten, welche sich bei dem besprochenen Gegenstande vorfinden mögen. Zwei Reihen der ersteren Gattung welche eine und dieselbe Function für einen und denselben Umfang der ver-

änderlichen Grösse ausdrücken, sind nicht nothwendig identisch, man kann daher die Coefficienten der gleichartigen Glieder auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens nicht allgemein gleich setzen.

Ferner gibt es bekanntlich viele dieser Reihen, deren Summen in Bezug auf einen gewissen Umfang der Werthe der veränderlichen Grösse verschwinden; man kann solche Reihen zu anderen addiren, ohne die Bedeutung der letzteren zu verändern, woraus die Ungewissheit und Unrichtigkeit der Resultate, welche das Princip der Methode der unbestimmten Coefficienten, auf Reihen mit periodischen Grössen angewandt, darbietet, von selbst erhellet.

V. Ueber ein Kennzeichen der Anwesenheit imaginärer Wurzeln in einer gegebenen Gleichung.

(Annales de Mathématiques pures et appliquées par M. Gergonne. Tome, 16. 1825 — 1826. p. 382.)

Lehrsatz. Einer geordneten Gleichung mit einer Unbekannten gehören wenigstens so viele Paare imaginärer Wurzeln, als sich in derselben Gruppen von vier unmittelbar aufeinander folgenden Coefficienten p, q, r, s ausfindig machen lassen, für welche das Product $(q^2-pr)(r^2-qs)$ gleich Null oder negativ ausfällt.

Beweis. Eine geordnete Gleichung lässt bekanntlich nicht mehr reelle positive Wurzeln zu, als Zeichenabwechslungen, und nicht mehr negative

Wurzeln, als Zeichenfolgen in derselben erscheinen. Besitzt daher die Gleichung keine imaginäre Wurzeln, so ist die Anzahl der reellen positiven Wurzeln genau so gross, als die Anzahl der Zeichenabwechslungen, und die Anzahl der negativen Wurzeln genau so gross, als die Anzahl der Zeichenfolgen.

Hieraus folgt, dass eine Gleichung, in der ein Glied zwischen zwei mit gleichen Zeichen versehenen Gliedern fehlt, wenigstens ein Paar imaginäre Wurzeln fordert. Denn das fehlende Glied kann sowohl mit dem Coefficienten $+ o$, als auch mit $- o$ versehen, in die Gleichung zurückgestellt werden. Wegen der Gleichheit der Zeichen seiner Nachbarglieder bringt eine dieser Voraussetzungen zwei Zeichenfolgen, die andere aber zwei Zeichenabwechslungen hervor. Hätte also die Gleichung keine imaginären Wurzeln, so würden nach obiger Regel das eine Mal um zwei positive Wurzeln mehr angezeigt, als das andere Mal, was ungereimt ist. Da wir hier stillschweigend annehmen, die Coefficienten der gegebenen Gleichung seyen reelle Grössen, so sind die imaginären Wurzeln stets paarweise vorhanden, und somit ist die gemachte Folgerung richtig.

Derselbe Schluss zeigt, dass man, so oft sich in einer Gleichung eine Lücke zwischen gleichen Zeichen befindet, berechtiget ist, dieser Gleichung ein neues Paar imaginärer Wurzeln zuzuschreiben. So oft also in einer Gleichung zwei unmittelbar an einander grenzende Glieder fehlen, so oft entsprechen derselben wenigstens zwei imaginäre Wurzeln, denn eines der fehlenden Glieder kann immer so in die

Gleichung zurückgesetzt werden, dass das andere zwischen zwei mit gleichen Zeichen versehenen Gliedern mangelt.

Da die Einführung einer reellen Wurzel in eine Gleichung auf die Anzahl der bereits vorhandenen imaginären Wurzeln keinen Einfluss ausübt, so sey

$$px^{n+1} + qx^{n} + rx^{n-1} + sx^{n-2}$$

eine aus dem ersten Theile einer geordneten Gleichung mit der unbekannnten Grösse x herausgehobene Gruppe unmittelbar aufeinander folgender Glieder, und es werde die Gleichung selbst mit $x + A$ multiplicirt, wobei A eine reelle Grösse anzeigt, wodurch eine neue, mit denselben imaginären Wurzeln versehene Gleichung entsteht, in welcher die drei Nachbarglieder

$$(q+pA)x^{n+1} + (r+qA)x^{n} + (s+rA)x^{n-1}$$

erscheinen.

Man lasse nun $A = -\frac{r}{q}$ seyn, damit der Coefficient $r + qA$ verschwinde, so hat die Gleichung ein Paar imaginäre Wurzeln, wenn zugleich $q + pA$ und $s + rA$ einerlei Zeichen annehmen, oder was dasselbe ist, wenn das Product

$$(q + pA)(s + rA)$$

positiv wird. Es ist aber mit Hülfe des für A gewählten Werthes

$$(q+pA)(r+sA) = \frac{1}{q^2}(q^2-pr)(qs-r^2)$$

daher gehören der vorgelegten Gleichung wenig-

stens zwei imaginäre Wurzeln, wenn das Product

$$(q^2 - pr)\ (r^2 - qs)$$

einen negativen Werth erhält.

Würde einer der Factoren dieses Productes $= 0$, so wäre diess ein Zeichen, dass in obiger transformirten Gleichung ausser $r + qA$ noch einer der Coefficienten $q + pA$, $s + rA$ verschwindet, wobei dieselbe Folgerung Statt findet.

Berichtigung.

Seite 342 Z. 13 statt $\frac{\pi al}{\pi\sqrt{gl}}$ soll es heissen: $\frac{\pi al}{a\sqrt{gl}}$.

ZEITSCHRIFT
FÜR PHYSIK UND MATHEMATIK.

PHYSIKALISCHE ABTHEILUNG.

I. Beschreibung eines Instrumentes zur Messung der Elasticität der Dämpfe bei den Temperaturen der Atmosphäre. Vom k. k. Regierungsrathe und Director des polytechnischen Institutes, Joseph Prechtl.

Bei den Versuchen über die Elasticität der Dämpfe hängt die Genauigkeit in der Bestimmung der Grösse dieser Elasticität für verschiedene Temperaturen sowohl von der genauen Beobachtung dieser Temperaturen, als auch von der Genauigkeit der Messung der Quecksilbersäule selbst ab, welche mit der Elasticität des Dampfes im Gleichgewichte steht. Beide Bestimmungen sind nicht ohne Schwierigkeiten. Zur genauen Bestimmung der Temperatur der Dämpfe, deren Elasticität beobachtet werden soll, ist es im besonderen wesentlich, dass diese Tempera[illegible]r geraume Zeit constant erhalten werde, weil man ausserdem niemals sicher ist, ob die beobachtete Temperatur auch wirk-

lich jene der Dämpfe und der zu messenden Quecksilbersäule sey. Diese Beständigkeit der Temperatur durch längere Zeit kann am leichtesten und sichersten in der Luft eines Zimmers erhalten werden; weit sicherer, als mit Hülfe des Wassers; und es schien mir daher, dass sich die Elasticitäten der Dämpfe für mässige Wärmegrade mit der grössten Genauigkeit würden bestimmen lassen, wenn man einen Dampf-Elasticitätsmesser in der Art vorrichtete, dass die Spannkraft der Dämpfe bei der Statt findenden Lufttemperatur jedesmal mit Genauigkeit an demselben gemessen werden kann; so dass die Beobachtungen wie an einem meteorologischen Instrumente, zu jeder Zeit und unter denjenigen Umständen, welche sich als die günstigsten ergeben, gemacht werden können. Zu diesem Behufe habe ich nachstehendes Instrument eingerichtet.

In der Fig. 1 ist AAA eine zweischenklich gebogene Röhre, etwa 12'' hoch, deren Schenkel soviel möglich parallel sind, und eine innere Weite von etwa 4 Linien haben. Beide Enden O P sind verschlossen. Der Raum ON enthält Wasserdämpfe; der Raum PN' ist vollkommen luftleer. Der übrige Raum der Röhre NAN' enthält reines Quecksilber. Diese zweischenklige Röhre ist in das Fussgestell FF durch Einkittung der unteren Krümmung dergestalt befestigt, dass die beiden Schenkel senkrecht stehen. Am oberen Theile werden die beiden Schenkel durch das Querstück OP zusammengehalten; unten auf der oberen Fläche des Fusses, welche nach dem Durchschnitte GH in der Fig. 3 vorgestellt ist, durch das Querstück Q. Diese beiden Verbindungsstücke sichern zugleich den Parallelismus der beiden Schenkel. LL' sind zwei etwa ei-

einen Zoll lange, der Länge nach aufgeschlitzte, mit einer kleinen Handhabe versehene, Röhre von Messingblech, welche sich an die Röhren elastisch anschliessen und an denselben auf und ab bewegen lassen; ihre untere Fläche ist, senkrecht auf die Axe, genau abgeschliffen. Stellt man diese Schieber über die Fläche des Quecksilbers in N oder N′; so lässt sich zwischen dieser Fläche und dem untern Rande desselben durchvisiren, so dass man die Lage dieser Niveaus mittelst dieser beiden Schieber genau feststellen kann.

Um nun die durch den Wasserdampf getragene Quecksilbersäule N′S genau messen zu können, ist das Schrauben-Micrometer BCDE angebracht, welches in der Figur 2 von der Seite vorgestellt ist. Es besteht dieses nämlich aus der Schraube BB (Fig. 1) mit der in 100 gleiche Theile getheilten Micrometerscheibe D und dem Rade oder Knopfe E; ferner aus den zwei parallelen Leitungsstangen CC, welche oben durch das Querstück CBC verbunden und unten in den Oeffnungen der Messingplatte TV des auf der oberen Fläche des Fusses aufgeschraubten Trägers mnop (Fig. 2) befestiget sind; endlich in dem Stücke Fig. 4, welches in F′ die Schraubenmutter, seitwärts in FF die mit aufgeschlitzten Hälsen versehenen Oeffnungen für die beiden Leitstangen, und in KK zwei Oeffnungen enthält, durch welche die beiden Glasröhren (mit einigem Spielraume) hindurchgehen.

Endlich ist auf der obern Fläche des Fussgestelles in M (Fig. 3) ein senkrechtes messingenes Lineal von gleicher Höhe mit der Glasröhre, aufgeschraubt, auf welchem das Thermometer RR (Fig. 2) befestiget ist. Die-

ses Thermometer ist in der Art construirt, die ich im IV. Bande der Jahrbücher des polytechnischen Institutes S. 311, beschrieben habe, und statt der Kugel mit einem langen dünnen Cylinder versehen: es enthält nur etwa 32° R ober und 8° R unter 0; und jeder Grad ist in 10 Theile getheilt. Dreissig Grade dieses Thermometers nehmen beiläufig einen Raum von 7 Zollen ein.

Mit diesem Instrumente, das nach Art eines bleibenden meteorologischen Instrumentes im Zimmer aufgestellt werden kann, wird nun auf folgende Weise beobachtet: Nachdem man das Thermometer mehrmal beobachtet, und sich von der Beständigkeit der Temperatur überzeugt hat, stellt man sogleich die beiden Schieber L L′ auf die Quecksilberflächen N N′, indem man mit einer Loupe diese Stellung möglichst genau verrichtet. Wenn man sich von dem Instrumente wieder entfernt, so wird es unter den vorigen Umständen wieder bald auf die vorige Temperatur zurückkommen, wenn sich diese etwa während der ersten Beobachtung geändert haben sollte; dann rectificirt man den Stand der Visiere aufs Neue, bis man von der richtigen Lage derselben sich überzeugt hat. Haben auf diese Art für eine bestimmte Temperatur endlich die beiden Schieber die völlig richtige Stellung erhalten, so kann man nun die Messung der Quecksilbersäule mit aller Bequemlichkeit mittelst des Micrometers vornehmen. Man dreht nämlich mittelst des Knopfes E die Micrometerschraube so lang herum, bis der das Glasrohr einschliessende Ring K′ dem untern Rande des Schiebers L, welcher auf dieser Seite den Stand der Quecksilberfläche bezeichnet, so nahe

kommt, dass mittelst der Loupe nur noch ein äusserst kleiner Zwischenraum bemerkt wird, oder eben die Berührung eintritt; hierauf bemerkt man den Stand des Zeigers u auf der Micrometerscheibe, und dreht nun, unter Abzählung der Umdrehungen, die Schraube so lange, bis der andere Ring K gegen die untere Fläche des Schiebers L′ in eben dieselbe Lage kommt, wie vorher, und zählt die durch das Micrometer angegebenen Theile zusammen; welche nun die absolute Höhe der Quecksilbersäule N′ S bei dieser Temperatur angeben. Um diese Höhen für verschiedene Elasticitäten gehörig vergleichbar zu machen, müssen sie dann auf die Temperatur des Quecksilbers von 0° R reducirt werden.

Die Aufstellung des Instrumentes selbst muss übrigens genau senkrecht seyn. Man überzeugt sich hiervon durch Anwendung eines Senkels, mit welchem man die senkrechte Lage der Glasröhren untersucht. Der Fuss des Instrumentes ist mit Blei eingegossen, um einen festeren Stand zu erhalten, und es ist gut, denselben mit Wachs an eine feste Unterlage anzukleben oder mit Schrauben zu befestigen, damit er die ihm einmal gegebene senkrechte Stellung bei der Bewegung der Micrometerschraube nicht verliere.

Ich habe mit diesem Instrumente schon seit länger als einem Jahre Beobachtungen angestellt, und mich von der Genauigkeit desselben überzeugt. Ich bediente mich Anfangs nur der zweischenkeligen mit den Schiebern L und L′ versehenen, und in dem Fussgestelle befestigten Glasröhre AA. Die Höhe der Quecksilbersäule in beiden Schenkeln, von der Fläche Q aus bis an den untern Rand der Schieber gemessen, nahm

ich mit einem Stangenzirkel ab: Die Differenz dieser gemessenen Höhen gibt der beobachteten Elasticität zugehörige Quecksilberhöhe.

Ist die untere horizontale Linie Q genau bestimmt, und der Stangenzirkel mit einem Micrometer versehen; so gibt auch diese Methode Genauigkeit; obgleich ich glaube, dass die von mir später angewendete, hier beschriebene Einrichtung, durch welche die die Elasticität des Dampfes ausdrückende Quecksilbersäule unmittelbar gemessen wird, den Vorzug verdiene. Bei dem hier beschriebenen Instrumente gehen 42 Gänge der Micrometerschraube auf einen Zoll oder 4200 Micrometertheile betragen einen Zoll, folglich gehen 350 Theile auf eine Linie. Die Annäherung der Quecksilberniveaus an die untern Ränder der Schieber kann auf 3 bis 4 Micrometertheile genau gemessen werden. Die Höhe der zu bestimmenden Quecksilbersäule lässt sich also unter den gehörigen Vorsichten auf $\frac{1}{100}$ Linie genau beobachten. Ich werde zu einer andern Zeit die mit diesem Instrumente gemachten Beobachtungen mittheilen.

Da dieses Instrument übrigens die unmittelbare Ansicht der Quecksilbersäule gewährt, welche bei der Temperatur des Instrumentes und der atmosphärischen Luft von den in der letztern enthaltenen Wasserdämpfen, unter der Voraussetzung getragen wird, dass sie mit Feuchtigkeit gesättiget sey; so kann man dasselbe insofern auch als eine meteorologische, eine deutliche Ansicht dieses Verhaltens dem Anfänger gewährende, Vorrichtung ansehen und gebrauchen.

Das Wesentliche des Instruments ist die zweischenklige Glasröhre, über deren Verfertigung ich

noch Folgendes beizufügen habe: Man wählt die Röhre soviel möglich von gleicher Dicke, was bei einer Länge von nur etwa 2 Fuss keine Schwierigkeit hat. Nachdem sie nun zweischenklig gebogen und an dem einen Ende P (Fig. 1) zugeschmolzen worden ist; so wird sie mit der gehörigen Menge reinen Quecksilbers gefüllt, dieses an das verschlossene Ende P gebracht, und nun über einer Weingeistlampe gehörig ausgekocht. Wenn man nun die doppelte Glasröhre in die senkrechte Lage bringt; so füllt das Quecksilber die eine Glasröhre bis P völlig an, während ein Theil der andern, noch mit der Luft correspondirenden, leer bleibt. Diesen leeren Raum füllt man nun bis nahe an das Ende O mit reinem destillirten, eben ausgekochten Wasser an, zieht da mittelst eines Löthrohrs die schon vorher enger gelassene Oeffnung O in eine kurze dünne Röhre aus, und erhitzt nun ober der Weingeistlampe das in der Röhre enthaltene Wasser zum Sieden, indem man damit bei dem obern Theile O anfängt und abwärts gegen das Quecksilber fortschreitet. Der Wasserdampf strömt nun durch die dünne Oeffnung aus, wobei man nur darauf zu sehen hat, dass dieses Ausströmen niemals unterbrochen, daher die Röhre fortwährend gehörig erhitzt werde. Nachdem nun auch endlich das Wasser über dem Quecksilber zum Verdampfen kommt, wird das dünne Röhrchen, in welches O ausgezogen ist, sogleich zugeschmolzen. Nach der Abkühlung der Röhre sinkt nun das Quecksilber von P nach N′, nach Massgabe der vorhandenen bleibenden Temperatur der Wasserdämpfe.

Durch diese Verfahrungsart werden die ober dem

Quecksilber befindlichen Räume der beiden Glasröhren gänzlich von der Luft befreit; so dass das Instrument auch bei Temperaturen bedeutend unter o° R noch den angemessenen Ausschlag gibt. Wenn das Wasser in der Röhre ON völlig verdampft worden ist: so hängt in den mittleren Temperaturen das condensirte Wasser in Tropfen an der Wand der Glasröhre, ohne dass auf der Oberfläche des Quecksilbers sich eine in Betracht zu ziehende Menge ansammelte: ist dagegen bei der Schliessung der Röhre noch mehr Wasser vorhanden, so bildet dieses ober dem Quecksilberniveau eine kleine Wassersäule, deren Höhe in den Temperaturen, für welche das Instrument bestimmt ist, ziemlich constant bleibt, und welche, auf Quecksilber reducirt, von der Höhe der gemessenen Quecksilbersäule N′S abgezogen werden muss.

II. Ueber das Glühen des Kalkes in der Oxygenflamme und in der Flamme eines Gemenges aus gleichen Raumtheilen Oehlgas und Oxygengas. Von Prof. Pleischl in Prag.

In mehreren politischen Zeitungen wurde vor kurzer Zeit eines Versuches erwähnt, der in London angestellt worden seyn soll, und so beschrieben wird:

„Man leitet die Flamme einer Weingeistlampe durch einen Strom von Sauerstoffgas auf ein Stück

Kalk, das hierauf 80mal stärker leuchtet, als eine Argand'sche Lampe von derselben Grösse. Das Licht soll in einer Entfernung von 120 Meilen (wahrscheinlich englische Meilen) sichtbar gewesen seyn. *Die Ursache dieser Erscheinung ist noch unbekannt."

In dieser Beschreibung ist Manches dunkel ausgedrückt; es ist daher etwas schwierig, nach dieser Notiz den Versuch nachzumachen, und in wissenschaftlichen Blättern ist mir hierüber noch nichts zu Gesichte gekommen.*) Aufgefordert von Einigen, die sich von der Richtigkeit des Erzählten Ueberzeugung zu verschaffen wünschten, musste ich die Umstände, von welchen das Gelingen des Versuches abhängt, erst auffinden. Ich will sie hier mittheilen, weil ich glaube, das Experiment dadurch andern zu erleichtern.

Man zündet eine Weingeistlampe oder eine Oehllampe an, welche letztere sich nach einigen vergleichenden Versuchen, noch besser hierzu zu eignen scheint, und bläst die Flamme mittelst Oxygengas, welches in einer schicklichen Vorrichtung angesammelt sich befindet, (ich hatte eine etwas grosse Schweinsblase dazu verwendet) und aus einer engen Mündung ausströmt, an, wodurch eine Spitzflamme entsteht, die man auf Kalk richtet, kurz also, es ist

*) Die erste Nachricht, welche eine wissenschaftliche Zeitschrift enthält, befindet sich im Juni Hefte der Annals of philosophy; aus dem auch die Notiz, welche im dritten Hefte dieser Zeitschrift Seite 306 vorkommt, entlehnt ist. Beide konnte der Herr Verfasser, als er diesen Aufsatz schrieb, noch nicht in den Händen haben, denn das Schreiben, welches ihn begleitete, war vom 10. Juli datirt. (B.).



ein Versuch mit dem Oxygenlöthrohr. Der Ausdruck Löthrohr ist jedoch nicht im strengsten Sinne zu nehmen, denn mit einem eigentlichen Löthrohr geht der Versuch nicht, wenigstens nicht gut. Zuerst nahm ich eine Glasröhre, wie ich selbe zum Ausströmen des Hydrogens bei der chemischen Harmonika anwendete, und hatte das Vergnügen, die Erscheinung eines hellen, blendenden Lichtes gleich beim ersten Versuche hervorzubringen.

Die Glasröhre — da sie in die Weingeistflamme selbst hinein gebracht werden muss, und das durch sie ausströmende Oxygen feucht ist, und diese Feuchtigkeit sich an die Glasröhre absetzt — zersprang jedoch bald, und ich musste mich um eine andere Ausströmungsröhre umsehen. Ich liess daher messingene Röhrchen giessen, an der Spitze fein durchbohren, und an grössere Röhrchen anschrauben. Nach vielen vergeblichen Versuchen kam ich endlich dahin, die Grösse der Ausströmungsöffnung zu finden, bei welcher der Versuch am besten gelingt.

Diese Oeffnung beträgt nach meiner Erfahrung zwischen $\frac{5}{10}$ und $\frac{6}{10}$ eines Millimeters. Da eine Wiener Linie 0,002195 Meter ausmacht, so sind 0,0005 oder 0,0006 gleich 0,2 bis 0,3 Linien.

Ist die Oeffnung des Ausströmungsröhrchens grösser, so entsteht eine grössere Flamme, welche mit knatterndem Geräusche brennt, und das Glühen des Kalkes nicht zweckmässig hervorbringt.

Bei dem Löthrohr sind, wie bekannt, deutlich zwei Flammenkegel zu unterscheiden, ein äusserer, lichterer, und ein innerer bläulicher.

Soll der Versuch gelingen, so muss der innere

blaue Flammenkegel gerade auf den Kalk treffen, geschieht diess, so kommt der Kalk, in den Zustand des Weisglühens, und verbreitet ein sehr helles und ein sehr blendendes Licht, welches mir noch blendender zu seyn scheint, als jenes, welches der im Oxygengas brennende Phosphor verbreitet.

Was das Wort Kalk eigentlich bedeuten soll, musste auch erst ausgemittelt werden. Um dieses zu erfahren, liess ich gebrannten Kalk bringen, einen Theil davon im Mörser zu Pulver zerreiben, einen andern Theil mit Wasser löschen, und ihn in trockenes Kalkhydrat verwandeln; einige Stücke endlich liess ich unverändert.

Zuerst unterwarf ich die ganzen Stücke dem Versuche; es entstand wohl Glühen, aber das Resultat entsprach der Erwartung nicht ganz; nun kam das zerriebene Kalkpulver, welches auf einer ausgehöhlten Holzkohle lag, und etwas zusammengedrückt und geebnet war, an die Reihe. Die Kohle liess ich jedesmal so halten, dass die Fläche des Kalkes, mit der auf sie treffenden Flamme beinahe einen rechten Winkel bildete. Um das Herunterrollen des Kalkpulvers zu verhüten, musste eine etwas grössere Höhlung in die Kohle gemacht werden, und zwar so, dass unten ein etwas grösserer Vorsprung, gleichsam eine Leiste entstand.

Das entstehende Licht war viel intensiver, als im vorigen Versuche, und ziemlich blendend. Am besten gelang der Versuch mit dem trockenen fein zerriebenen Kalkhydrat; denn als dieses ebenfalls in die Oxygenflamme gebracht wurde, verbreitete sich ein sehr helles und ein sehr blendendes weisses Licht,

welches viel stärker leuchtete, als das Licht, in den vorigen Versuchen, soweit dieses nach dem blossen Augenschein beurtheilt werden konnte.

Nun wollte ich auch andere Körper demselben Versuche unterwerfen. Ich nahm gebrannte Talkerde, und erhielt ebenfalls ein befriedigendes Resultat; Kreide in ganzen Stücken leuchtete ebenfalls gut, nur wurde sie an der Glühungsstelle ätzend, und färbte rothes Lakmuspapier blau.

Zinkoxyd verbreitete ebenfalls viel Licht, doch war das Licht nicht rein weiss, auch fing das Zinkoxyd zu verdampfen an, und es flogen leichte, zarte, weisse Flocken in die Luft.

Thonerde und Kieselerde wurden durch den Luftstrom zerstäubt.

Eisenperoxyd kam zwar in der Oxygenflamme zum heftigen Glühen, aber das verbreitete Licht war nicht weiss, sondern stark roth gefärbt. Es scheint sonach, dass sich nur weisse Körper zu diesen Versuchen eignen, und unter allen am besten das trockene Kalkhydrat, welches zugleich unter allen der wohlfeilste ist.

Ich versuchte, um die Lichtstärke zu vermehren, zwei Ströme von Oxygen auf das Kalkhydrat wirken zu lassen, und brachte es bald dahin, dass der Versuch gelang, indem die Entfernung so genommen wurde, dass die Umkreise beider hellleuchtenden Flächen sich berührten. Das Licht war bedeutend vermehrt; ob aber im geraden, oder in welchem Verhältnisse, kann ich nicht bestimmen.

Da das Oxygen seiner Darstellung wegen ein etwas theurer Körper ist, so wollte ich das Oehlgas ver-

suchen, um zu sehen, ob es nicht das Oxygen zu diesem Behufe ersetzen könnte; überzeugte mich jedoch bald, dass es zu dieser Anwendung nicht ganz geeignet sey; denn ich bemerkte, dass die Flamme des Oehlgases das Kalkhydrat schwärzt, wenn man die ganze Flamme auf das Kalkhydrat wirken lässt, hält man aber das Kalkhydrat so entfernt, dass nur die äusserste Spitze der Flamme selbes berührt, so kommt es wohl auch ins Glühen, aber so hell und leuchtend bei weitem nicht als bei reinem Oxygen.

Um nicht auf halbem Wege stehen zu bleiben, mengte ich das Oehlgas anfangs mit gleichen Raumtheilen atmosphärischer Luft, und sah, dass es jetzt bei weitem besser wirkte. Dadurch ermuthigt mengte ich jetzt Oehlgas mit gleichen Raumtheilen Oxygengas. Obwohl bekannt ist, dass öhlbildendes Gas mit gleichen Raumtheilen Oxygen gemengt, eine Knallluft gibt, welche mit flammenden Körpern angezündet, heftig verpufft, und obschon ebenfalls bekannt ist, dass dasjenige Gas, welches bei trockener Destillation von Oehl erhalten wird, das ich Kürze halber mit Andern Oehlgas nenne, eine sehr beträchtliche Menge öhlbildendes Gas enthalte, ja grösstentheils aus öhlbildendem Gas bestehe, so glaube ich doch, dass bei der angegebenen Weite der Ausströmungsröhrchen durchaus keine Gefahr einer Explosion vorhanden sey, indem die Entzündung durch eine so kleine Oeffnung von 0,0005 Meter sich unmöglich in das Gasmagazin (die Schweinsblase), fortpflanzen könne.

Die Voraussetzung wurde auch durch die Erfahrung auf das vollständigste erprobt, indem die Aus-

strömungsröhrchen viele Minuten in der Weingeistflamme blieben, und so heiss wurden, dass man sich bei ihrer Berührung die Finger ordentlich verbrannte, ohne dass jedoch nur das Geringste von einer Entzündung nach ihnen bemerkt wurde.

Auch hier wendete man mit gutem Erfolge zwei Ausströmungsröhrchen an, um die glühende Oberfläche und das Licht zu vermehren.

Die oben angegebene Art des Experimentes war aber noch immer nicht ganz befriedigend für mich, indem bei Ausführung des Versuches noch einige Schwierigkeiten obwalteten, namentlich der Umstand, dass es beschwerlich war, die Ausströmungsröhrchen so einander zu nähern, dass die Ränder der glühenden, runden Flächen einander berührten.

Ich zündete nun das Gasgemenge aus gleichen Raumtheilen Oehlgas und Oxygengas bestehend an, und bemerkte, dass es an der Mündung des Ausströmungsröhrchens mit einer sehr kleinen, bläulichen, unscheinbaren Flamme fortbrannte; aber wie erstaunte ich, und alle Umstehenden, über das helle und äusserst blendende Licht, welches das Kalkhydrat verbreitete, als dieses Flämmchen es berührte. Es glich in der Form einer kleinen Sonne, und das Auge konnte den Glanz des Lichtes kaum ertragen. Als zwei solcher Flämmchen auf das Kalkhydrat gerichtet wurden, war natürlich die Intensität des Lichtes noch bei weitem grösser. Nun wurde im Eifer noch eine dritte Blase mit ähnlichem Gasgemenge gefüllt, herbeigehohlt, um die glühende Fläche noch mehr zu vergrössern, aber aus Eile nicht beachtet, dass die Ausströmungsöffnung der an dieser Blase

vorhandenen Röhre viel grösser war, als der übrigen zwei Röhrchen. In kurzer Zeit erfolgte ein heftiger Knall, wobei die Blase ganz zerrissen wurde. Zum grössten Glück kam Niemand dabei zu Schaden, und die darneben liegenden zwei andern Blasen blieben ganz unversehrt.

Dieses Fortpflanzen der Entzündung durch die messingene Ausströmungsröhre möge andere Experimentatoren vorsichtiger machen. Um ähnliche Fälle zu verhüten, muss ich anführen, dass bei der nachher vorgenommenen Messung der Durchmesser der Oeffnung dieses Rohres 1,2 Millimeter, oder 0,0012 Meter befunden wurde. Nach längerer Einwirkung der Flamme des Gasgemenges aus Oehlgas und Oxygen fand man die Oberfläche des Kalkhydrates mehrfach zersprungen und zerrissen, doch waren diese Spalten nicht tief, und betrugen kaum den vierten Theil einer Linie ($\frac{1}{4}$ Linie). An der Lichtstärke konnte kein Unterschied beobachtet werden, man mochte eine frische oder schon vorher glühend gewesene und gesprungene Stelle des Kalkhydrates ins Glühen versetzen. Nach längerm Glühen fand man die Farbe des Kalkhydrats etwas verändert; die glühend gewesene Stelle war schmutzig, gelblich, und von einer weissen Einfassung umgeben.

Auch Kreide in ganzen Stücken leuchtete, aber nicht so schön, wie das Kalkhydrat.

Später sah ich, dass die glühende Stelle des Kalkhydrates sich bedeutend vergrössert, wenn man die Flamme des Oehlgasgemenges statt senkrecht, etwas schief einwirken lässt; doch wollte es mir scheinen, als wenn die Intensität des Lichtes dadurch ge-

schwächt worden wäre. Vielleicht schien es mir bloss, wenigstens bemerkte ich, als das Ausströmen des Gases durch vermehrten Druck auf die Schweinsblase verstärkt worden, keinen Unterschied mehr.

Auch Hydrogen wurde versucht, entsprach jedoch nicht. Auch hier fand man nach dem Versuche das Kalkhydrat und die Kreide zerklüftet und etwas gelblich gefärbt.

Durch diese Versuche glaubt der Verfasser diejenigen Umstände ausgemittelt zu haben, von welchen das Gelingen dieses Versuches abhängt, nämlich: Die rechte Grösse der Ausströmungsmündung = 0,0005 M. oder $\frac{2}{10}$ einer Linie Wiener Masses oder $\frac{1}{60}$ eines Zolles, dann dass Kalkhydrat zu diesen Versuchen der tauglichste Körper sey.

Die Ursache der Erscheinung glaubt der Verfasser darin zu finden, dass der Kalk durch die Hitze der Oxygenflamme oder des Gasgemenges aus gleichen Raumtheilen Oehlglas und Oxygen in den weissglühenden Zustand versetzt wird, und dass dieser Zustand des Weissglühens eben die Ursache des hellen, blendenden weit sichtbaren Lichtes sey. Schon oben wurde auf einen ähnlichen Versuch aufmerksam gemacht, nämlich auf das intensive und blendende Licht, welches der Phosphor verbreitet, wenn er im Oxygengas verbrannt wird. Um noch ein ähnliches Beispiel anzuführen, erinnere man sich an das blendende Licht bei der Oxydation des Zinkes, d. h. bei der Bereitung der Zinkblumen auf trockenem Wege.

In diesen beiden Fällen bildet sich ein starrer Körper, als Verbrennungsproduct, welcher in unendlich kleinen Theilchen im Zustande des Weissglü-

hens in der Flamme schwebt, und so die Hervorbringung und Verbreitung des hellen glänzenden Lichtes bewirkt; beim Phosphorverbrennen bildet sich Phosphorsäure; beim Brennen des Zinks, Zinkoxyd.

Das öhlbildende Gas, und das Oehlgas brennen angezündet mit einer sehr hellen, stark leuchtenden Flamme, weil hier so viel Kohlenstoff vorhanden ist, dass nicht die ganze Menge desselben alsogleich mit dem Oxygen der atmosphärischen Luft sich zu Kohlenoxydgas oder Kohlensäure verbinden kann, sondern ein Theil desselben im weissglühenden Zustande im Innern der Flamme schwebend sich erhält, und dadurch die Helligkeit der Flamme hervorbringt.

Im Gegentheil ist die Flamme ganz unscheinbar und klein, wenn ein luftiger (luftförmiger, gasförmiger) Körper als Verbrennungsproduct entsteht. Um wieder mit einigen Beispielen das Gesagte zu beleuchten, erinnere man sich an die Thatsache, dass beim Brennen der Knallluft (2 Raumtheile Hydrogen und ein Raumtheil Oxygen) ein ganz kleines und beim Tageslichte kaum bemerkbares Flämmchen zum Vorschein kommt, aus dem Grunde, weil das Verbrennungsproduct luftig ist, und in Wasserdämpfen besteht.

Dass die Helligkeit der Flamme von der Hitze bei dem Verbrennen wohl unterschieden werden müsse, lehrt das oben angeführte Beispiel, indem hier bei der unscheinbaren Flamme eine solche Hitze hervorgebracht wird, die alle menschliche Vorstellung weit übersteigt, da alle für unschmelzbar gehaltene Körper dieser Hitze nicht widerstehen und schmelzen.

Als zweites Beispiel mag der obige Fall dienen. Das Oehlgas verbreitet beim Brennen ein helles und

glänzendes Licht aus dem oben angegebenen Grunde. Ist es aber mit gleichen Raumtheilen Oxygen gemengt, so brennt es, wie ebenfalls oben schon bemérkt wurde, mit einer kleinen, bläulichen, wenig leuchtenden Flamme, weil hier beim Verbrennen lauter luftige Verbindungen entstehen, nämlich theils Wasser, theils Kohlenoxydgas, theils Kohlensäure.

Die Ursache des hellen Leuchtens des Kalkhydrats wäre somit auch nachgewiesen, und auf analoge Fälle reducirt; ja man könnte es sogar sonderbar finden, dass man nicht schon lange durch Analogie geleitet auf diesen Versuch gekommen ist, wenn es nicht ein alter Erfahrungssatz wäre, dass man das zunächst liegende gewöhnlich am spätesten findet.

Ob von dieser Entdeckung eine Anwendung wird gemacht werden können? Wahrscheinlich, wenn erst noch einige Hindernisse beseitigt seyn werden. Das Herabrollen des Kalkhydrats wird sich wohl verhindern lassen, obwohl ich jetzt noch nicht weiss, wie, wenn von einer Anwendung im Grossen die Rede seyn sollte. Wendet man das mit Oxygen gemengte Oehlgas an, zündet man das aus der engen Mündung strömende Gas an, und lässt die kleine Flamme auf das Kalkhydrat wirken, so lässt sich das Herunterrutschen desselben durch eine Kante auf der Kohle so ziemlich, wenigstens im Kleinen verhindern, besonders wenn man die Flamme, statt senkrecht, etwas schief auf das Kalkhydrat wirken lässt, wo der Kalk auf der schiefen Ebene ganz ruhig liegen bleibt.

Das Gemenge aus Oehlgas und Oxygen, welches nach dem Ergebnisse meiner Versuche dem reinen Oxygen vorzuziehen seyn möchte, könnte seiner ex-

plodirenden Eigenschaft wegen, Manchen abschrecken; allein erstens glaube ich, dass bei der oben angegebenen Grösse der Ausströmungsmündung keine Fortpflanzung der Entzündung in die Gas-Vorrathskammer Statt finden könne; und zweitens, die Möglichkeit zugegeben, dass sich die Entzündung durch das engmündige und lange Ausströmungsrohr fortpflanzen könne, so braucht man, wie beim Neumann'schen Knallluftgebläse, nur einige sehr enge Drahtgitter anzubringen, und die Gefahr des Explodirens ist beseitiget.

Ob dieses Licht in einer Entfernung von 120 englischen Meilen, welche (da eine gesetzmässige englische Meile 848 niederöstr. Klafter gleich ist,) 25,44 österreichische Meilen betragen, sichtbar ist, müssen Versuche entscheiden; vor der Hand hat man keine Ursache dieses zu bezweifeln, vorzüglich, wenn Spiegel mit zu Hülfe genommen werden.

Letzterer Umstand führt unwillkührlich auf das Heliotrop von Gauss zurück, dessen Anwendung durch das oft eigensinnige Sonnenlicht sehr erschwert wird; bedient man sich aber des Lichtes vom glühenden Kalke statt des Sonnenlichtes, so ist man vom Sonnenschein unabhängig, und die Beobachtungen mit dem Heliotrop können auch bei umwölktem Himmel, vielleicht auch bei Nachtzeit angestellt werden, und würden um so leichter aus der Ferne bemerkbar seyn.

Auch auf Leuchtthürmen wird man davon Anwendung machen können, und hier dürfte vielleicht die neue Entdeckung an ihrem schicklichsten Platze seyn, indem man hier ruhig stehende Gasometer anbringen

kann, aus welchen das Gas durch zahlreiche Röhrchen ausströmt, und die Flamme der Weingeist- oder Oehllampe auf den Kalk treibt, und zum hellsten Weissglühen bringt.

Das blosse Oxygengas dürfte bei der Ausführung im Grossen einige Schwierigkeiten, welche der menschliche Scharfsinn zwar zu beseitigen lernen wird, darbieten, indem hiezu eine Weingeist- oder Oehllampe erfordert wird, und es doch etwas schwer hält, mehrere Flammenkegel von gleicher Länge wie es hiezu nothwendig ist, hervorzubringen. Um eine grössere Wirkung zu erlangen, muss das ganze Streben dahin gerichtet seyn, eine grosse Fläche des Kalks ins Glühen zu versetzen. Dieses wird vielleicht nur dadurch möglich werden, dass man viele Ausströmungsröhrchen anbringt, welche so gestellt sind, dass die durch sie ins Glühen versetzten runden Stellen in einander fliessen, und so nur eine einzige grosse glühende Fläche entsteht. Dass sich auch die Oehllampe hierzu eignet, und nach meinen Versuchen beinahe vortheilhafter als die Weingeistlampe ist, indem das Oehl ein viel wohlfeileres Brennmaterial abgibt, als Weingeist; doch dürfte die Anwendung einer oder mehrerer Lampen immer mit Schwierigkeiten verbunden seyn.

Wendet man aber ein Gemenge aus Oehlgas und Oxygen an, so braucht man erstlich gar keine Lampe, und zweitens, man kann so viel Ausströmungsröhrchen anbringen, so viel man ihrer benöthigt. Das Anzünden geschieht wie bei der Gasbeleuchtung. Die Gefahr, dass sich die Entzündung bis ins Gasreservoir fortpflanzen könnte, kann wie beim Neumannischen

Gebläse durch Drahtgitter allein, oder durch Drahtgitter und dazwischen liegende Asbestfäden, oder durch Drahtgitter und durch ein Stöpselventil, welches mit Quecksilber gesperrt ist, beseitigt werden.

III. Untersuchungen über die Farbe der Flamme verschiedener Körper. Nach Talbot und Blackadder, frei dargestellt.

Bekanntlich gibt es zwei Wege, die Beschaffenheit der Farbe irgend eines leuchtenden Körpers zu erfahren, indem man entweder das Licht auf ein durchsichtiges dreiseitiges Prisma leitet, und die Beschaffenheit und Vertheilung der Farben in dem dadurch entstandenen Farbenbilde beobachtet, oder indem man diese Farbe mit freiem Auge untersucht, und vorzüglich darauf achtet, ob sich an allen Stellen dieselbe Färbung zeigt, oder verschiedenfarbige Stellen vorkommen. Auf dem ersten Wege haben wir bereits durch den unsterblichen Fraunhofer manches Neue kennen gelernt; auf demselben hat auch Talbot mehrere interessante Beobachtungen gemacht. Den zweiten Weg hat Blackadder betreten, und dabei vorzüglich den Grund einer bestimmten Färbung zu erforschen gesucht. Die Untersuchungen beider folgen hier in möglichster Kürze und mit Hinweglassung alles minder Interessanten.

1.

Talbot's Untersuchungen.

(Edinb. Journ. of Science. Nr. IX. p. 77.)

1. Nach Brewsters Erfahrungen besteht die Flamme des mit Wasser verdünnten Weingeistes aus völlig homogenem gelben Lichte. Eine Lampe mit dieser Flüssigkeit verdient daher den Namen einer monochromatischen, und ist von ihm zur Beleuchtung der Gegenstände, die man mit einem Microscope ansieht, empfohlen worden; allein sie gibt selbst bei einer grossen Flamme nur wenig intensives Licht. Wenn man einen Docht aus Baumwolle mit einer Auflösung von salzsaurer, schwefelsaurer oder kohlensaurer Soda tränkt, trocknet, und in eine Lampe einsetzt, so bekommt man anhaltend starkes gelbes Licht. Eine Lampe mit zehn solchen in eine Reihe gestellten Dochten gibt ein fast eben so intensives Licht, wie eine Wachskerze. Blaues Glas absorbirt die gelben Strahlen einer solchen Lampe, und lässt nur schwache violette durch; werden diese durch ein blassgelbes Glas aufgefangen, so sieht man dahinter die Flamme gar nicht, während eine gewöhnliche Kerzenflamme daselbst recht wohl sichtbar ist. Die gelben Strahlen, die mit wenigen blauen und grünen die Flamme bilden, sind ganz homogen. Wird der Docht in einer Lösung von salpetersaurem, chlorsauren, schwefelsauren und kohlensauren Kali getränkt, so entsteht eine bläulich weisse Flamme.

2. Nach Herschels Erfahrungen gibt lebhaft brennender Schwefel homogenes gelbes Licht. Talbot prüfte es dadurch, dass er Schwefel mit Sal-

peter vermischt hinter einem Schirme anzündete, der eine enge Spalte hatte, durch welche das Licht herauskam. Als es durch ein Prisma gegangen war, gab es ein Farbenbild, mit einem sehr hellen, gelben Streifen. Um zu untersuchen, ob dieses gelbe Licht mit dem auf die vorhin angegebene Weise erhaltenen homogen sey, brachte er eine Flamme so hinter der anderen an, dass beide ihr Licht auf einmal durch die Spalte des Schirmes auf das Prisma senden konnten. Er erhielt aber im Farbenbilde wieder nur einen gelben Streifen, zum Beweise, dass beide Farben homogen seyen, und durch das Prisma auf gleiche Weise abgelenkt werden. Dasselbe Resultat erhielt er, als das Licht untersucht wurde, das sich aus einem Gemenge von Schwefel, Salpeter, und einem der oben zuerst genannten Salze entwickelte.

3. Hält man ein reines Stück Platin in den blauen Theil einer Gaslichtflamme, so ändert sich dadurch die Farbe derselben nicht, rührt man aber das Platin zuerst mit der Hand an, so entwickelt sich gelbes Licht eine Minute lang, oder noch länger; reibt man es mit Seife, so wird dieses Licht noch stärker. Wachs leistet dieses aber nicht. Salz auf Platin gestreut, verknistert in der Flamme, und macht die Flamme gelb. Aus diesen Erscheinungen könnte man den Schluss ziehen, dass das gelbe Licht vom Krystallisationswasser herrühre, wenn dieses Wasser nicht in anderen Salzen vorhanden wäre, die doch nicht dieselbe Wirkung hervorbringen, und Schwefel, der mit gelber Flamme brennt, nicht wasserfrei wäre.

Ein Stückchen salzsaurer Kalk auf den Docht einer Weingeistlampe gelegt, gibt der Lampe einen

ganzen Abend hindurch eine rothe und grüne Farbe, ohne eine Verminderung zu erleiden. Ein Tropfen Oehl auf den Docht einer Weingeistlampe gegeben, ertheilt der Flamme den Glanz eines Kerzenlichtes, und eine nach aussenhin gelbe Flamme, aber nur so lange, bis er verbrannt ist.

4. Die Flamme aus Schwefel und Salpeter enthält überdiess noch einen merkwürgigen rothen Antheil. Als Talbot den gelben Streifen im Farbenbilde dieses Flammenlichtes mit einem Prisma untersuchte, bemerkte er einen andern rothen Streifen ausserhalb des gewöhnlichen rothen, der von ihm durch einen dunklen Raum getrennt, mithin minder brechbar war, als dieser. Er ist schwach leuchtend, und kann nur mit einem guten Prisma bemerkt werden. An Farbe waren beide rothe Antheile nicht von einander verschieden. Dieser Streifen kommt wahrscheinlich vom Salpeter, den man bemerkte ihn auch in der Flamme einer Weingeistlampe, deren Docht mit salpetersaurer oder chlorsaurer Pottasche getränkt ist. Es scheint, als wenn dieser rothe Antheil das Licht der Kalisalze, der gelbe hingegen das der Sodasalze charakterisire.

5. Phosphor mit Salpeter gibt ein sehr intensiv leuchtendes Farbenbild, in welchem keine Farbe fehlt oder vorwaltet. Es ähnelt den Farbenbildern des Lichtes von glühendem Kalk, Platin, und andern festen Körpern, und unterscheidet sich wesentlich vom Sonnenspectrum, in welchem unzählige schwarze Linien vorkommen. Es ist merkwürdig, dass dem Sonnenlichte nur das der Himmelskörper ähnlich ist.

6. Das rothe Licht, welches man in Schauspiel-

häusern braucht, gibt ein herrliches Spectrum mit vielen vorherrschend lichten und dunklen Linien. Im rothen Theil sind diese Linien in Menge vorhanden und durch dunkle Zwischenräume von einander getrennt, auch kommt der oben erwähnte äusserst rothe Streifen vor, der wahrscheinlich vom Salpeter herrührt. Im orangefarbigen Theil befand sich eine leuchtende Linie, im gelben auch eine, im grünen drei, im blauen war eine sehr helle und mehrere schwächere. Die leuchtende Linie im Gelb rührt wahrscheinlich vom Schwefel her, die andern mögen im Spiessglanz, Strontian, etc. ihren Ursprung haben. Besonders mag der orange Theil vom Strontian herkommen, weil Herschel in der Flamme des salzsauren Strontian einen orangefarbigen Strahl gefunden hat. Wenn dasselbe auch von allen anderen gilt, was hier vom gelben, rothen und orangefarbigen gesagt wurde, so wird man noch dahin kommen, aus der Beschaffenheit des Farbenbildes einer Flamme die chemische Zusammensetzung der Körper, die sich darin befinden, zu erkennen.

2.

Blackadder's Untersuchungen.

(Edinb. new. phil. jour. I. p. 52.)

Die Flamme eines brennenden Körpers besteht aus mehreren von einander wohl zu unterscheidenden Theilen. Der innere conische Theil ist mit mehreren äusseren umgeben, welche die eigentliche Flamme bilden und so unabhängig von einander sind, dass man einen derselben wegnehmen kann, ohne dadurch

die andern merklich zu afficiren. Wenn Hydrogen enthaltende Körper brennen und ohne Beihülfe des Löthrohrs oder eines anderen ähnlichen Mittels eine blaue Flamme bilden, so besteht diese aus zwei Theilen. Der eine folgt unmittelbar auf den Gas- oder Dunstkegel nach aussen zu, und hat, von der Seite angesehen, den Anschein eines breiten blauen Streifens, der sich von der Basis des Kegels bis zur Spitze desselben erstreckt. Ausserhalb dieser befindet sich ein dunkler, blauer Theil, der sich mehr oder weniger über den vorigen ausbreitet und von aussen bürstenartig begrenzt ist.

Wenn die vorhin genannten Substanzen mit weissem Lichte brennen, so erscheint der weisse Antheil innerhalb der blauen Schichte, aber jener reicht nicht bis zur Basis des Kegels und diesen kann man nur bis zu einer kleinen Entfernung am Aeusseren des weissen Antheils verfolgen.

Untersucht man die Flamme einer gut zugerichteten Kerze, so bemerkt man, dass der blaue Streifen ausserhalb des weissen Lichtes der Spitze des durchsichtigen Kegels oder der Stelle, wo sich das weisse Licht mit grossem Glanze entwickelt, gegenüber, verschwindet.

Eben so bemerkt man den äussersten blauen Theil oberhalb der Mitte der Flamme, wo das weisse Licht intensiv zu werden anfängt, nicht leicht.

Die Farbe des Lichtes einer Flamme hängt von der Art des Verbrennens und von der Gegenwart fremdartiger Körper ab.

Wenn man Alkohol von specifischem Gewichte 0,835 in einer Lampe ohne Docht verbrennt (welches

am leichtesten in einer Lampe geschieht, die ein communicirendes Gefäss vorstellt, wovon ein Arm kugelförmig, der andere in eine dünne enge Röhre ausgezogen ist), und der Flamme die Länge eines halben Zolles gibt, so erscheint sie durchaus blau. Hat sie aber eine Länge von 1 oder $1\frac{1}{2}$ Zoll, so entwickelt sich eine bedeutende Menge weissen Lichtes. Bringt man die Röhre, aus welcher die Flamme heraustritt, zur Rothglühhitze dadurch, dass man sie in eine blaue Weingeistflamme hält, so werden einige Theile des Weingeistes, die mit dieser Röhre in Berührung kommen, herausgeschleudert, und geben ein gelbes Licht. Es wird also blaues, weisses und gelbes Licht beim Verbrennen derselben Flüssigkeit entwickelt.

Oehl kann beim Verbrennen weisses, weisses und blaues oder blaues und gelbes Licht geben. Brennt es ohne Docht in einer Lampe mit starker Flamme, so ist das Licht blau mit einem grossen Antheil von Weiss; wird aber der Zufluss des Oehles nach und nach vermindert, so nimmt das weisse Licht ab und zuletzt bleibt nur weisses übrig. Wird der Zufluss des Oehles wieder stärker, so erscheint mitten im blauen Theil der Flamme eine gelbe Stelle, die beim ferneren Zuflusse in gelblich weiss, als die gewöhnliche Farbe übergeht. Nach demselben Grundsatze kann das in einem Weinglase enthaltene Oehl entweder blaues oder weisses und blaues Licht geben.

Wenn verdünnter Alkohol, wie man ihn zum Verbrennen zu brauchen pflegt, in einer Lampe ohne Docht brennt, so ist die Flamme blau, oder blau und weiss, wie die des reinen Alkohols. In diesem Falle

wird der Weingeist destillirt und verbrannt. Das Wasser wird, bevor es durch die Flamme geht, ausgeschieden, ohne bedeutend erwärmt worden zu seyn, und nur die Brandröhre erlangt eine merkliche Temperaturerhöhung. Die Flamme ist conisch und das Verbrennen geht ohne Geräusch vor sich. Daher kann man in einer Lampe, wo die Flamme aus einer Röhre ohne Docht herausbrennt, gewöhnlichen Weingeist statt Alkohol verbrauchen.

Wird verdünnter Weingeist mit einem Docht verbrannt, so ist die Flamme nicht blau und weiss, wie im vorigen Falle, sondern grösstentheils gelb. Die weisse Farbe verschwindet gänzlich und nur ein Theil der Basis der Flamme ist blau. Die Flamme ist weniger regelmässig gestaltet, flackert beständig hin und her, und man hört ein immerwährendes Knistern. Der Docht wird nicht verkohlt und erleidet überhaupt keine Veränderung. In diesem Falle findet gleichzeitig eine Verflüchtigung und ein Verbrennen der alkoholigen Theile Statt, sie werden aber wohl, wie in einer Lampe ohne Docht, von den wässerigen getrennt. Ein Theil des Wassers wird in Dünste verwandelt, ein anderer bleibt im Docht zurück und macht, dass man ihn öfters wechseln muss. Da dieser zugleich von der Flamme erwärmt wird, so werden nicht bloss Alkohol- sondern auch Wasserdünste in das Innere der Flamme geschleudert. Es beträgt desshalb die Wassermenge im Docht, wenn aller Weingeist verbrannt ist, nicht so viel, als ursprünglich im verdünnten Weingeiste enthalten war, wie man leicht aus seinem specifischen Gewichte abnehmen kann. Hieraus sieht man, dass im gelben Theil der Flamme

Wasserdünste enthalten sind, allein es folgt daraus noch nicht, dass diese die gelbe Farbe verursachen; denn es gibt jeder Weingeist bei einer gewissen Behandlung eine gelbe Flamme.

Ein durch wissenschaftliche Verdienste ausgezeichneter Mann (Brewster) behauptet, durch viele genaue Versuche ausgemittelt zu haben, dass alle Körper, die nur unvollkommen verbrennen, wie Baumwolle, Linnen, Papier etc. solches Licht geben, in welchem die gelben Strahlen vorwalten, und dass die Entwickelung dieses Lichtes von der Natur des Dochtes und von der Schnelligkeit abhängt, mit welcher die Flüssigkeit verdampft. Da nun mit Wasser verdünnter Alkohol beim Verbrennen viel gelbes Licht gibt, so scheint der Schluss nicht übereilt zu seyn, dass durch das Wasser der Alkohol zu einem unvollkommenen Verbrennen gleichsam disponirt wird. Dessungeachtet kann man sich noch fragen, was ist unvollkomenes Verbrennen? Ist die Gegenwart des Wassers dazu unumgänglich nothwendig. Folgende wenige Thatsachen mögen zur Beantwortung dieser Fragen etwas beitragen, und zur näheren Untersuchung reitzen.

Die blaue Flamme des Weingeistes hat, dem Vorausgesagten gemäss, eine regelmässige Gestalt und das Verbrennen geht dabei ruhig vor sich; brennt er mit einem Docht, so erzeugt sich gelbes Licht, die Flamme ist unstät und man vernimmt ein beständiges Knistern. Dieses rührt wahrscheinlich von sehr schwachen Explosionen her, die da erfolgen, wo der blaue Theil erscheint, indess geht nicht dieser, sondern der äussere Theil in Gelb über. Die blaue Flam-

me Alkohol haltiger Stoffe vergrössert sich, wenn man die aus der Röhre ohne Docht hervortretende Flüssigkeit mit einem heissen Draht berührt, ohne jedoch die Farbe merklich zu ändern. Man kann aber durch Berühren der Mündung obiger Röhre mit einem solchen Draht oder mit einer Glasröhre bewirken, dass kleine Theile davon weggeschleudert werden, wie wenn man ein heisses Stück Metall in Wasser taucht. Diese kleinen Theile dringen ins Innere der Flamme ein, scheinen zu explodiren und am äusserten Theile der Flamme das trübe Gelb zu erzeugen. Bedient man sich eines Dochtes aus Baumwolle oder Schwamm, so vertritt dieser die Stelle des genannten Drathes; je rauher seine Oberfläche ist, und je weiter er in die Flamme hinein reicht, um desto mehr gelbes Licht entwickelt sich. Dieses wird durch Folgendes erläutert: Man befestige eine kleine Kugel aus Baumwolle an einen Glasstab, und benetze sie mit Alkohol. Zündet man diesen an, so brennt er mit gelber Flamme, doch wird die Menge des gelben Lichtes bedeutend vermehrt, wenn man die Kugel schnell um ihre Axe dreht. Durch das Drehen wird die Flamme dem Kügelchen näher gebracht, und in dieselbe auch mehr Weingeist getrieben.

Dampf, der mit Gewalt aus einer Oeffnung herausfährt, vertritt die Stelle eines Löthrohres, wird er aber in sichtbaren Dunst verwandelt, so ändert er die blaue Farbe einer Weingeistflamme nicht. Setzt man aber unter die Röhre, aus welcher der Weingeist herausbrennt, ein kleines Gefäss mit Wasser, und taucht ein heisses Metallstück hinein, damit dadurch Wasserdämpfe in die Flamme geschleu-

dert werden, so entwickelt sich alsogleich gelbes Licht. Ein Theil davon ist offenbar durch kleine, feste Theile hervorgebracht, die vom Metall sich los gemacht haben; indess bringen verschiedene Metalle ähnliche Wirkungen hervor, und Theile vom kalten oder siedend heissen Wasser durch mechanische Mittel in die Flamme gebracht, ändern die Farbe derselben nicht. Nähert man zwei blaue Flammen einander, so ändert sich dadurch ihre Farbe nicht; bringt man aber eine blaue Flamme mit einer gelben in Berührung, so wird jene auch gelb.

Es ist bekannt, dass Kohlenoxydgas und gekohltes Wasserstoffgas beim Verbrennen gelbes Licht geben. Zündet man einen Splitter aus Holz oder einer andern vegetabilischen Substanz an, und löscht ihn nach wenigen Secunden wieder aus, so geht ein weisslichter Rauch davon aus, der eine blaue Flamme gelb färbt. Berührt man mit dem Ende eines verkohlten Holzstückes eine Flamme, oder bringt ihr dasselbe nur nahe, so wird der äussere Theil derselben gelb. Hier könnte aber doch eine kleine Quantität Wasser mit im Spiele gewesen seyn. Lässt man aber ein Stück Holz gänzlich verglimmen, so kann man wohl keine Feuchtigkeit vermuthen, und doch ward dadurch die blaue Flamme gelb gefärbt. Reibt man zwei verkohlte Holzstücke unterhalb einer blauen Flamme, so wird sie auch gelb.

Denselben Effect erlangt man, wenn man ein solches Stück Holz mit einem Messer kratzt, während es sich unter der Flamme befindet.

Verschiedene Salze, wie z. B. salzsaurer Baryt, salzsaure Soda, färben eine Flamme gelb, und man

schreibt dieses gewöhnlich dem Krystallisationswasser zu. Aber bei dieser Voraussetzung ist es schwer zu begreifen, warum dieses nicht alle Salze thun, die Krystallisationswasser enthalten. Immerhin mag das Wasser zur Bildung des farbigen Lichtes mitwirken, es kann aber nicht die Hauptursache abgeben.

IV. Ueber das Brechungsvermögen zweier in Mineralien neu entdeckter Flüssigkeiten, nebst Beobachtungen über die Natur dieser Substanzen von D. Brewster.

(Edinb. Journal of Science. Nr. IX. p. 122.)

Brewster hat bekanntlich in Amethysten und Topasen Höhlungen entdeckt, die mit zwei eigenen Flüssigkeiten angefüllt sind. Man hielt die in beiden Mineralien vorkommenden Flüssigkeiten für itendisch, weil sie von der Wärme gleich ausgedehnt werden, allein um dieses mit Bestimmtheit ausmachen zu können, war es nothwendig, das Brechungsvermögen beider zu bestimmen. Dazu gab der Umstand eine schickliche Gelegenheit, dass Brewster eine Höhlung fand, deren Gestalt und Lage im Krystalle die genaue Messung dieses Vermögens beider Flüssigkeiten gestattete. Die Lage dieser Höhlung stellt Fig. 5 vor, wo C einen auf ihr senkrechten Durchschnitt der Länge nach angibt, welcher gegen den Blätter-

durchgang EF und GH des Topases geneigt ist. Das Verfahren Brewsters, um dieses Vermögen zu bestimmen, war folgendes:

Er befestigte den Krystall mit der Höhlung bei einer Temperatur von 60° F. am Goniometer, und mass den Winkel, unter welchem ein von einem Kerzenlichte kommender Lichtstrahl RD auf EF auffällt, wenn er beim Eintritt in die Höhlung anfing eine totale Reflexion zu erleiden. Dieser Winkel betrug 38° 42′; hierauf berechnete er nach dem Index des Brechungsverhältnisses im Topas, welcher = 1.620 ist, den Brechungswinkel CDB und den Winkel DCP, unter welchem der Strahl auf AB auffällt, und fand ersteren = 22° 42′, letzteren = 37° 38′ 35″; daher betrug der Winkel ADC = 67° 18′, der Winkel ACD = 52° 21′, und DAC als die Neigung der Seitenfläche der Höhlung gegen die brechende Oberfläche EF = 60° 21′.

Heisst man den Winkel FAB = x, CDB = φ, und den Winkel der totalen Reflexion ψ, so hat man

$$x = \psi + \varphi$$

weil in den ähnlichen Dreiecken ADB und CPB die Winkel CAD und CPB einander gleich sind, und man hat CPB = DPQ = CDB + DCP.

Es wurde nun, ohne das Goniometer vom Platze zu verrücken, der getheilte Kreis desselben um seine Axe gedreht, bis derselbe Strahl RD an der brechenden Oberfläche der expansiveren Flüssigkeit im Topase eine totale Reflexion erlitt. Da betrug der Einfallswinkel KDR′ 26° 29′. Beim ferneren Drehen des Kreises erlitt derselbe Strahl an der Fläche, welche die zweite Flüssigkeit vom Topas trennte, eine totale Re-

flexion beim Einfallswinkel von 11° 52′. Ist nun m der Index des Brechungsverhältnisses einer Substanz, so ist der Sinus des Winkels, unter welchem das Licht einfallen muss, damit es an der zweiten Fläche die totale Reflexion erleidet $= \frac{1}{m}$, und wenn eine Flüssigkeit mit dieser Fläche in Berührung steht $= \frac{m'}{m}$, vorausgesetzt, dass der Exponent des Brechungsverhältnisses der Flüssigkeit m′ ist. Daher hat man

$$m' = m \,.\, \sin \psi.$$

Ist nun δ der Einfallswinkel, φ, φ', φ'' die Brechungswinkel, m, m′, m″ die Exponenten der Brechungsverhältnisse für Topas, die ausdehnbarere und die andere Flüssigkeit, so hat man

$$\sin \varphi = \frac{\sin \delta}{m}, \quad \varphi' - x = \psi, \text{ und}$$

$$m' = m \,.\, \sin (\varphi' - x)$$

$$m'' = m \,.\, \sin (\varphi'' - x).$$

Hiernach erhält man folgende Werthe für m, m′ und m″

$$m = 1.620$$

$$m' = 1.1311$$

$$m'' = 1.2946.$$

Viele, denen die neuen Flüssigkeiten interessant schienen, konnten keine solchen Exemplare der Mineralien finden, welche sie enthalten. Brewster meint, dieses rühre daher, dass sie nur immer schön krystallisirte Stücke wählten, wie man sie in mineralogischen Sammlungen hat. Unter den abgerundeten, unvollkommen krystallisirten weissen Topasen aus Brasilien oder Neu-Holland findet man selten ein

Stück, in dem man nicht mittelst eines zusammengesetzten Microscopes unzählige, mit den genannten Flüssigkeiten gefüllte Höhlungen bemerkt. Bei einiger Uebung im Spalten und Zurichten der Mineralien wird ein Beobachter leicht in jedem Exemplare solche Höhlungen entdecken und bemerken, wie sich die Flüssigkeit aus denselben über die Spaltungsflächen ergiessen.

1.

Ueber die Anzahl und Anordnung der Höhlungen.

Brewster hat schon in einer früheren Abhandlung gezeigt, dass er in einem Exemplar von Cymophan, das $\frac{1}{7}$ Q. Zoll Fläche darboth, 30000 Höhlungen gezählt habe. Und doch gibt dieses nur ein schwaches Bild von ihrer eigentlichen Anzahl. Sie sind oft so klein, dass man sie nur durch sehr stark vergrössernde Microscope sichtbar machen kann, und man eben so leicht die Sandkörner am Meere zählen könnte, als diese Höhlungen.

Die Schichten, in denen sie liegen, stehen weder mit den primären noch mit den secundären Flächen der Krystalle in einer Beziehung. Man findet sie in jeder möglichen Richtung, und sie schneiden einander in Winkeln, die von denen der Krystalle ganz unabhängig sind. In einem Quarzkrystalle fand sie Sommerville in Gruppen, wie Bienenzellen angeordnet; sah man sie im reflectirten Lichte an, so schienen ihre entsprechenden Flächen einander parallel zu seyn, jedoch hatten die Höhlungen gegen einander

die mannigfaltigsten Lagen. In anderen Exemplaren bilden sie Flächen mit veränderlicher, und oft mit entgegengesetzter Krümmung, in einem anderen Exemplare, das Herrn Sivright gehört, liegen die Höhlungen in Gruppen, welche der feinsten gekrümmten Haarlocke ähnlich sind. In einem Exemplare von blauen brasilianischem Topas, der dem Steinhändler Spaden in Edinburg gehört, finden sich die Höhlungen in vier mit einander parallelen Schichten, die eine Dicke von $\frac{1}{9}$ Z. einnehmen. Die Anordnung der meisten Gruppen scheint der Zufall bestimmt zu haben; einige aber scheinen nach bestimmten Principien geordnet zu seyn.

In einem Stücke ist eine grosse Anzahl Höhlungen in geraden von einem Mittelpuncte wie Radien ausgehenden Linien angeordnet; jede geradlinige Gruppe besteht aus zwei, einige gar aus drei Reihen von Höhlungen, und alle laufen gegen ihren gemeinschaftlichen Ursprung zusammen. Der Raum zwischen je zwei Reihen ist mit sonderbar verzweigten Höhlungen ausgefüllt, deren einige einen halben Zoll lang sind. Das merkwürdigste daran ist, dass diese Höhlungen durch unzählige feine Aeste verbunden sind, wovon einige mit einer einzelnen Oeffnung der nächsten Reihe, zwischen welcher die lange Oeffnung liegt, communiciren.

In jeder Höhlung dieses merkwürdigen Minerals, die untersucht werden konnte, fanden sich beide neue Flüssigkeiten mit Ausnahme einer langen Höhlung, aus der sie entwichen sind, weil sie auf einer Seite vom Steinschneider geöffnet war. Die dichte Flüssigkeit nahm stets die fadenartigen Linien ein. Die

Fläche, in der die Höhlungen liegen, ist vollkommen eben, und beinahe senkrecht auf der Axe des Prisma.

2.

Ueber die Gestalt der Höhlungen, welche die Flüssigkeiten enthalten.

In einem der schönsten Topaskrystalle, die Brewster je gesehen hatte, bestand jede Höhlung aus mehreren einzelnen von verschiedener Länge und Breite, die mittelst paralleler Linien mit einander verbunden sind, und mit einander durch so feine Canäle communiciren, dass sie einem oft selbst dann entgehen, wenn man sich eines Microscopes bedient. In diesen Höhlungen sind die beiden Flüssigkeiten auf das merkwürdigste angeordnet; die dichtere nimmt die Ecken und feinen Canäle, die ausdehnbarere nimmt die weiteren Räume ein. Erwärmt man das Mineral mit der Hand, so geräth alle Flüssigkeit in Bewegung. Die dichtere verlässt ihre Ecken, und nimmt einen neuen Ort ein, und die verschiedenen Theile der ausdehnbareren Flüssigkeit vereinigen sich entweder mit einander, oder werden von einander durch dazwischen tretende Theile der dichteren Masse getrennt, die aus ihrer vorigen Lage vertrieben, und durch Capillarität in eine neue gebracht sind. Diese Lage verlassen sie wieder, wenn das Mineral abkühlt, und nehmen ihren vorigen Platz ein.

AB in Fig. 6 stellt Höhlungen dar, die einer Anzahl paralleler Cylinder gleichen, wovon einige aus schwer zu entziffernden Ursachen gegen C zu gewendet sind, so dass sie nach oben zu offen dastehen.

Desshalb sind auch die Flüssigkeiten daraus entwichen, und haben im Innern der Höhlung eine dunkle, durchsichtige, pulverige Masse zurückgelassen, welches bei der Verdünstung immer geschieht. Sieht man die von ihrer Flüssigkeit befreiten Höhlungen mit einem Microscope an, so bemerkt man die sonderbaren Gestalten, welche in Fig. 7, 8, 9 abgebildet sind. Sie sind wie abgedreht, und so symmetrisch und so schön von Aussen, dass man kaum begreifen kann, wie sie aus mechanischen Ursachen entstanden seyn mögen. Eine der Höhlungen, die mit den anderen nicht zusammenhängt, hat das Ansehen eines aufs schönste gezierten Scepters, wie Fig. 7 zeigt; jedoch liegen die verschiedenen Theile desselben in verschiedenen Ebenen, so dass sie wie eine Menge zerstreuter Linien aussehen, die Fig. 10 darstellt, wenn man sie in einer Richtung ansieht, die auf der, in welcher sie symmetrisch erscheinen, senkrechst steht.

Die Höhlungen AB (Fig. 6) konnten nur dann in die Lage bC gebracht werden, und die Flüssigkeit sich auf die Fläche ACB ergiessen, wenn die krystallisirte Masse ACB noch nicht ganz erhärtet war. Diese Behauptung hat hierin eine grosse Stütze, dass die Linie bC auf der Axe des Prisma senkrecht steht, und daher in der Ebene des deutlichsten Blätterdurchgangs liegt. Daher war die Flüssigkeit nach der Richtung des geringsten Widerstandes entwichen.

Das hier besprochene Mineral enthält eine Gruppe die aus einer grossen Anzahl paralleler Höhlungen besteht, die sehr symmetrisch angeordnet sind; eine dieser Reihen stellt Fig. 11 dar. Nimmt man nun an, dass die Flüssigkeit im Mineral vor dessen völliger

Erhärtung durch die Hitze stark ausgedehnt war, so musste die Flüssigkeit in einer Höhlung auf die in der anderen nahen einen Druck ausüben, und auf diese Art eine Reihe von Höhlungen zu einer einzigen werden, ähnlich der in Fig. 9 abgebildeten. Liegen die Höhlungen in verschiedenen Ebenen, wie dieses Fig. 10 zeigt, so suchte die ausgedehnte Flüssigkeit zu der unmittelbar unter ihr liegenden hinabzusteigen, und sich mit ihr zu verbinden. Dadurch soll nicht gesagt seyn, dass die Höhlung bC in Fig. 6 auf diese Art entstanden sey, denn dieses macht der Umstand unwahrscheinlich, dass sie mit der geraden AB verbunden ist, sondern es soll dadurch nur das Entstehen der Gestalten Fig. 7, 8, 9 durch Vereinigung vieler wie Fig. 11 angeordneter Höhlungen erklärt werden.

Sind die Höhlungen regelmässig krystallisirt, so sind ihre homologen Flächen mit einander, und mithin auch mit der Haupt- oder secundären Gestalt des Krystalls parallel. In einigen sehr sonderbaren amorphischen Stücken von brasilianischem Quarz endigen sich diese hohlen Krystalle in sechsseitigen Pyramiden mit stumpfer Spitze, und die Axe dieser Pyramiden ist mit der des Krystalls parallel.

3.

Ueber die Beschaffenheit der Flüssigkeiten in den Höhlungen.

Nach dem Vorausgeschickten bleibt nur wenig über diesen Gegenstand zu sagen übrig. In einigen Quarzkrystallen scheint die Flüssigkeit, selbst bei der gewöhnlichen Lufttemperatur, eine sehr bedeutende

Spannkraft zu besitzen, und oft reicht nur eine geringe Erwärmung hin, das Mineral zu zersprengen.

Einen merkwürdigen Fall der Art erfuhr Sanderson, der einen Quarzkrystall von Quebek in den Mund nahm. Die geringe Temperaturerhöhung reichte hin, den Krystall zu zerreissen, und ihm den Mund zu verwunden. Die daraus hervortretende Flüssigkeit hatte einen sehr unangenehmen Geschmack.

In den schon früher von Brewster beschriebenen Höhlungen verwandelte sich die ganze Flüssigkeit, wenn sie erwärmt wurde, in Dünste, oder blieb tropfbar flüssig, wenn sie die Höhlung ausgefüllt hatte. Seit dieser Zeit entdeckte er aber Höhlungen, in denen man nach der Erwärmung so zu sagen drei verschiedene Substanzen bemerkte, nämlich die ausdehnbarere (expansible) im flüssigen Zustande, die dichte, und die Dünste der ausdehnbareren Substanz. Dieses sonderbare Factum wird durch die Fig. 12 erläutert, die eine Höhlung eines Minerals vorstellt, welche $\frac{1}{12}$ Z. lang ist. Die expansivere Flüssigkeit befindet sich in NN und N′N′, wo sich die grossen Höhlungen V und V′ befinden; n ist ein flüssiges Kügelchen ohne Höhlung. Wie man das Mineral erwärmt, löset sich die Flüssigkeit in NN und N′N′ in Dünste auf, der Antheil n dehnt sich zu einem elliptischen Kügelchen aus, dessen Kraft aber nicht hinreicht, um die zweite Flüssigkeit zwischen n und N, und n und N′ zu vertreiben, sondern durch die Expansivkraft der Dünste in NN und N′N′ im Gleichgewicht erhalten wird. In einer Topasplatte, wo die expansivere Flüssigkeit aus zwei Theilen besteht, die in der dichten Flüssigkeit schwimmen, ist ein Theil ein sphärischer Tropfen, der sich

in der Wärme ausdehnt, und in der Kälte zusammenzieht, und im durchgelassenen Lichte eine Wirkung hervorbringt, die der ähnlich ist, welche man sieht, wenn man die Pupille öffnet und schliesst.

Bei der abermaligen Untersuchung der zweiten oder dichten Flüssigkeit bemerkte Brewster mehrere sonderbare Thatsachen. Er hatte vorläufig bemerkt, dass die Verbindungs-Canäle zweier Höhlungen mit der dichten Flüssigkeit angefüllt sind, die ihre Lage ändert, wenn durch Wärme das Gleichgewicht der anliegenden Theile geändert wird. Die Theile dieser Flüssigkeit ziehen sich einander stark an, wie die des Wassers und werden auch stark vom Mineral angezogen. Die Theile der expansiveren Flüssigkeit ziehen sich und das sie einschliessende Mineral hingegen nur schwach an. Daraus folgt, dass die dichtere Flüssigkeit von den Ecken der Höhlung angezogen wird, sich an die Wände derselben anlegt und die Verbindungs-Canäle der Höhlungen anfüllt. Die expansivere Flüssigkeit hingegen erfüllt alle weitere Räume und schwimmt in grösseren und weiteren Theilen der Höhlungen auf der dichten.

Erwärmt man eine einzelne tiefe Höhlung, die beide Flüssigkeiten enthält, so muss die Spannkraft der ausdehnbareren, nachdem sie ihren Raum ausgefüllt hat, die Form der dichteren modificiren, indem sie selbe von einigen Ecken heraus und in andere hinein presst, bis sie mit der Kapillarität in ein Gleichgnwicht gekommen ist.

Wenn zwei Höhlungen mit einander communiciren, wie A und B in Fig. 13, so werden die punctirten Stellen von der expansiveren Flüssigkeit einge-

nommen, die dichte hingegen wird sich im Canale mn und in den Ecken o, p, r, s, befinden. Gesetzt es sey in der kleineren Höhlung B eine leere Stelle V und es werde das Mineral erwärmet, so wird die grössere Ausdehnung der expansiveren Masse in A, die keine Leere auszufüllen hat, die dichte Masse mn gegen V zu treiben, und in die Lage bcm bringen, wenn die Expansivkräfte ins Gleichgewicht gekommen sind. Ist aber A sehr gross gegen B, so wird die Flüssigkeit mn nach den Ecken o und p hingetrieben, und von da beim Abkühlen wieder in die Lage mn zurückkehren.

Steht die Höhlung A mit anderen in Verbindung, so kann es geschehen, dass bei der Erwärmung die dichte Flüssigkeit mn vertrieben wird und wieder zurückkehrt und so den Weg bald öffnet, bald schliesst, wie eine Klappe. Dieses zeigte sich an einem Topas-Krystalle, dessen Höhlungen Fig. 14 bei ABCDE vorstellt. Bei der gewöhnlichen Temperatur zeigt sich ein leerer Raum V in der expansiveren (punctirten) Flüssigkeit, die dichtere, (schattirte) nimmt die Ecken bc, de, DE und auch F ein. Erwärmt man das Mineral mit der Hand, so kann sich die Flüssigkeit in den Armen VC und VD nach V hin ausdehnen. Da aber bei AB, B und EF keine solchen Räume sind, so muss die Flüssigkeit in ihnen die dichtere vertreiben. Die in ED befindliche begibt sich nach D und die bei bc nach de, bis sie bei grösserer Anhäufung von der nahen Ecke mnop angezogen wird. Hier überzieht es zuerst die inneren Flächen der Ecke, wegen ihrer Anziehung zum Topas, dieser Ueberzug wird immer dicker und bildet die Wulste zwischen

o und p und zwischen m und n, welche sich endlich vermög ihrer gegenseitigen Anziehung zur Säule mnpo vereinigen. Nun ist die Säule bc der dichten Flüssigkeit gänzlich verschwunden, und der Raum ABCD ist mit der expansiveren angefüllt. Fährt man mit der Erwärmung mittelst der Hand fort, so treibt sie die Flüssigkeit AB durch den kleinen Cylinder der dichten Masse de, die aber augenblicklich wieder ihren Platz einnimmt. Da aber dieselbe Wärme auch die Flüssigkeit zwischen np und C afficirt, die einen Theil der dichten Masse mnop vertreibt, so bewegt sich diese Masse und der Ueberschuss von der, welche von bc vertrieben wurde längs der Seiten der Höhlung hin, und nimmt den Theil qr des Armes VD ein. Manchmal wird die dichte Masse von mnop ganz vertrieben und gibt einen Theil an das Ende C ab, doch bleibt im Allgemeinen in jeder Ecke mo nur eine sehr kleine Portion.

Wird der Krystall wieder kalt, so verlässt die dichte Flüssigkeit mn und qr, geht nach und nach durch de nach bc uud alles nimmt die ursprüngliche Lage wieder an.

Eine sonderbare Modification dieser Wirkungen bemerkte man in einer Höhlung eines Minerals, das sich Fig. 15 darstellt. Der Arm bV hat einen leeren Platz V, während die Höhlung A keinen derselben hat. Bei der gewöhnlichen Temperatur erscheint die dichte Flüssigkeit in a und c, und nur wenig in o und b, wo sie den engen Canal o b ausfüllt. Wendet man eine Erwärmung an, so füllt die Flüssigkeit in bV den Raum V aus, und weil die Höhlung Aaoc keinen derselben hat, so wird ein Theil ihrer Flüs-

sigkeit durch ab nach bV in Form kleiner Kügelchen getrieben. Beim Abkühlen kann man das Zurückkehren der Flüssigkeit von A nach bV wohl sehen. Die Zusammenziehung der Flüssigkeit in A macht, dass die dichte Flüssigkeit so wie die in mno (Fig. 15) erscheint, und bald wird die krumme Oberfläche mn mehr flach und zuletzt gar gerade wie in Fig. 16 Dieses zeigt einen Druck längs des Canals b′o′ nach der Richtung b′o′ an, ein Kügelchen der flüchtigen Flüssigkeit geht von o′ aus, geht durch die dichte Flüssigkeit und sammelt sich in A′. Nachdem deren drei oder vier diesen Weg genommen haben, ist das Gleichgewicht wieder hergestellt. In diesem Falle ist die Capillarkraft, welche die Wände des Canals auf die in ihm enthaltene Flüssigkeit ausüben, zu stark als dass sie den kleinen Kügelchen der flüchtigen Flüssigkeit in b′V′ erlaubte, ihren Platz zu ändern wie in Fig. 14.

Die flüssigen Klappen, so kann man sie wohl nennen, welche die verschiedenen Arme der Höhlungen von einander trennen, geben Anlass zu Speculationen über die Functionen thierischer und vegetabilischer Körper. In den grösseren Organen der gewöhnlichen Thiere muss die Schwere die Capillarität überwältigen oder wenigstens modificiren, aber in den feineren, besonders bei microscopischen Thieren, ist die Schwere von der Capillaranziehung völlig überwältigt, und daher wird es wahrscheinlich, dass Flüssigkeiten durch solche Klappen von einander getrennt erhalten werden. — Doch hierüber mögen Physiologen urtheilen.

4.

Ueber einige Erscheinungen, betreffend die Bildung der Höhlungen mit Flüssigkeiten.

In einem früheren Aufsatze hat Brewster auch die Phänomene beschrieben, welche eine Flüssigkeit in verschiedenen natürlichen und künstlichen Metallen darbietet. Er behauptet, seit dem mehrere Krystalle gesehen zu haben, doch bestand die Flüssigkeit immer aus Wasser und both daher nichts Merkwürdiges dar. In einem Minerale aber, das Brewster zur Untersuchung übergeben ward, fand er folgende Merkwürdigkeit: In der Zeichnung 17 stellt AB eine Höhlung in Quarz vor, die mit Ausnahme von ab ganz mit einer Flüssigkeit angefüllt ist. Die Flüssigkeit dehnt sich in der Wärme nicht stark aus, ist also wahrscheinlich Wasser, jedoch wenn man den Krystall schüttelt, wird sie trübe und weisslicht, welches von einem Sedimente herkommt, das sich in den untern Theilen der Höhlung abgesetzt hat.

In einem Quarzkrystall von Brasilien befindet sich eine Höhlung mit einer Luftblase, die über $\frac{1}{10}$ Z. lang ist. Ein Drittel davon ist mit einem weissen Pulver angefüllt, das aus krystallisirten Theilen besteht, die beim Umwenden des Minerals über der Oberfläche der Luftblase hinfliessen. In den vorhin erwähntem Quarzstück mit Höhlungen, die pyramidalisch zugespitzt sind, befindet sich nur eine Flüssigkeit, und in dieser ist meistens eine Luftblase. Die Höhlungen enthalten oft undurchsichtige Kügelchen, die gegen $\frac{1}{937}$ Z. im Durchmesser haben und

sich deutlich bewegen; in einer Höhlung zählte Brewster zehn derselben, deren sieben herumrollten, wenn man den Krystall drehte. In einem anderen Quarzstücke sind solche Kügelchen allenthalben vertheilt, wieder in einem anderen kommen sie in der Nähe der Gipfel der pyramidalen Höhlen vor, und zwar sind einige innerhalb, andere ausserhalb der Höhlung.

Bei der Krystallisation des Eises kommen einige Phänomene vor, die mit dem Vorhergehenden in genauer Verbindung stehen. Friert Wasser in einem gläsernen Gefässe, so ist oft das Eis durch Gruppen von Höhlungen unterbrochen, die dieselbe Gestalt und dasselbe Aussehen haben, wie die in Mineralien. Brewster fand oft gefrorne Thautropfen, die eine Portion Wasser enthielten, das bei der minderen Temperatur nicht gefroren war, einige Eiskrystalle zeigten ihm dasselbe unter noch merkwürdigeren Umständen. Am Morgen des 8. Octobers 1825 trat in Roxburghshire ein scharfer Frost ein. Der Weg im Garten war durch das schnelle Gefrieren des mit Sand vermengten Wassers um mehr als 1 Zoll über seine natürliche Lage erhöht. Alle diese erhöhten Theile bestanden aus verticalen, sechsseitigen Eisprismen, deren Spitzen dreieckig zu seyn schienen. Die Pflanzen waren mit körnigen Krystallen bedeckt, die im Allgemeinen sechsseitige Tafeln vorstellten.

Bei der Untersuchung der prismatischen Krystalle mittelst eines Microscops zeigten sich mehrere interessante Thatsachen. Sie hatten sehr viele Höhlungen der kleinsten Art, die sich in Reihen parallel mit der Axe des Krystalles, und in so gleichen Ent-

fernungen von einander befanden, wie gleichweit abstehende mathematische Puncte. Einige derselben waren lang und flach, andere ohne regelmässige Gestalt, sie enthielten aber im Allgemeinen Wasser und Luft.

Mittelst eines stark vergrössernden Microscops zeigten sie sich, wie Fig. 18 darstellt, wo ABC das Eis angibt, in dem sich eine lange Höhlung mo mit Wasser und Luft befindet. Das Eis löste sich nach und nach auf, und als das Ende no der Höhlung mn der äusseren Fläche des Eises nahe war, löste sich die Luft in no selbst ab, und ging so durch das Eis heraus. Dieses Phänomen ist dem Durchgange der flüchtigen Flüssigkeit durch Topas und Quarz, wie er oben angegeben wurde, ähnlich; in einem Falle fand die Luft, im anderen die Flüssigkeiten den Ausweg an der Stelle in der Richtung, wo die Spaltung am leichtesten geschieht.

Das Sonderbare an der Sache ist aber, dass der Raum on, der die Luft verlassen hatte, alsogleich vom Eise angefüllt, und die Höhlung auf mn reducirt war.

Da die Bildung des Eises der anderen Krystalle aus Substanzen, die durch Hitze flüssig gemacht sind, ganz ähnlich ist, so kann die Untersuchung seiner Höhlungen einiges Licht über die Bildung der Mineralkörper verbreiten.

Nachdem Brewster diesen Aufsatz, der in Extenso im zehnten Bande der Edinburger Transactions erscheinen wird, vollendet hatte, zeigte ihm W. Nicol einen Krystall aus schwefelsaurem Baryt, in welchem sich Höhlungen von derselben Art befan-

den, wie die, welche vorher beschrieben wurden; doch waren sie breiter als alle, die Brewster gesehen hatte. Diese wurden geöffnet, und die Flüssigkeit floss über die Spalte herab. In diesem Zustande legte Nicol den Krystall in sein Kabinet. Als er ihn nach 24 Stunden wieder ansah, bemerkte er, dass jeder Tropfen der Flüssigkeit in einen Schwerspathkrystall umgewandelt sey, der die primitive Form des Minerals hatte.

Diese Krystalle nahmen so viel Raum ein, als der ganze Tropfen betrug, und waren also nicht aus einer wässerigen Schwerspathlösung abgesetzt. Es scheint demnach, als hätte nur der Druck, welchem die Flüssigkeit ausgesetzt war, die Krystallisation verhindert.

V. Untersuchungen über den Einfluss der Temperaturänderungen auf die Berührungselectricität und deren Anwendung auf Bestimmung hoher Temperaturen von Becquerel.

(Annales de Chemie etc. April 1826. p. 371. Gelesen in der k. Akademie der Wissenschaften am 13. März 1826)

1.

Verfahren, mit dessen Hülfe man die Intensität eines electrischen Stromes messen kann.

Die electro-chemische Theorie, so wie sie die meisten berühmten Chemiker annehmen, nimmt als

feststehende Thatsache an, dass zwei Körper, die sich mit einander verbinden, durch Berührung in zwei entgegengesetzte electrische Zustände versetzt werden, dass der, welcher in der Verbindung die Stelle der Säure vertritt, negative, der das Alkali ersetzt, positive Electricität bekommt, dass die Intensität dieser electrischen Spannung mit der Temperatur bis zum Augenblicke wächst, wo die Vereinigung eintritt, dass aus der Vereinigung der zwei Electricitäten das Feuer entsteht, und hierauf alle electrischen Phänomene verschwinden.

Von dieser Theorie ist nur die Electricitätserregung der sauren und alkalinischen Körper durch die Erfahrung bewiesen, und man weiss gar nicht, was vorgeht, wenn sich die Temperatur derselben ändert. Gewiss hat der Zustand der Wissenschaft zur Zeit, wo diese Theorie aufgestellt wurde und die Schwierigkeit, die seitdem entdeckten Phänomene zu messen, die Auflösung dieser Fragen verhindert, deren Wichtigkeit für die electro-chemische Theorie so gross ist. Die Phänomene der Electricität, es mag diese im Zustande der Ruhe oder der Bewegung seyn, sind immer schwer zu messen, weil sie so viele Ursachen zu modificiren suchen, die man oft schwer beseitigen kann, und doch ist die Auflösung einer Frage nicht vollständig, so lange man die beobachteten Erscheinungen nicht messen kann.

Vor Coulombs schönen Entdeckungen war der auf Erfahrung beruhende Theil der Electricitätslehre schon sehr vorgerückt und doch hatte man noch kein Mittel, die Phänomene zu messen, man konnte nicht einmal die Stärke der Einwirkung zweier elec-

trischer Körper auf einander bei verschiedener Entfernung derselben dem Masse nach vergleichen und doch sollte dieses der erste Schritt zu einer mathematischen Theorie der Electricität seyn. Diesem geschickten und unermüdeten Physiker verdanken wir die Kenntniss der Apparate, wodurch man neue Eigenschaften des electrischen Fluidums entdeckte, auf die einer unserer berühmtesten Mathematiker (Poisson in Mem. de l'Iinst. 1812) die Analyse anwendete und dadurch der Schöpfer der Statik der Electricität wurde.

Seit Coulomb's Zeiten hat die Electricität grosse Fortschritte gemacht, die Entdeckungen Volta's, Oested's und Ampères haben die Grenzen der Wissenschaft erweitert, und doch kann man die meisten dahin gehörigen Phänomene, besonders die, welche sich auf die Entwickelung der Electricität beziehen, noch nicht genau messen. Untersuchungen hierüber müssen für die Wissenschaft ein Interesse haben und das ist auch der Grund, welcher mich vermochte, die Arbeit zu unternehmen, die ich der Akademie vorzulegen die Ehre habe.

Ich will zuerst das Verfahren beschreiben, dessen ich mich bediente, um die Stärke der durch einen electrischen Strom erzeugten electro-dynamischen Kraft zu messen, wenn dieser Strom durch einen Galvanometer (Schweigger'schen Multiplicator) geht, in dem sich zwei miteinander verbundene Magnetnadeln befinden, wie sie Ampère angab. Eine in Grade getheilte Glasplatte gibt die Ablenkung einer dieser Nadeln an. Es handelt sich nun zuerst darum, das Verhältniss zwischen diesen Ablenkungen und den ih-

nen entsprechenden electro-dynamischen Kräften zu finden. Man hat angenommen, dass die Stärke einer solchen Kraft dem Sinus des Ablenkungswinkels proportionirt sey; aber dieses stützt sich auf keine Erfahrung, sondern ist nur aus der Zusammensetzung von Kräften, die senkrecht auf der Richtung des electrischen Stromes stehen, entnommen. Ich habe nicht die Absicht dieses Gesetz zu finden, sondern die Intensität eines Stromes zu suchen, der einer gegebenen Ablenkung entspricht.

Wendet man zwei unveränderlich und in paralleler Richtung mit einander verbundene Magnetnadeln, deren ungleichnamige Pole nach derselben Weltgegend gerichtet sind, am Galvanometer so an, dass eine innerhalb, die andere ausserhalb desselben sich befindet, so hat man den Einfluss des Erdmagnetismus grösstentheils aufgehoben und es bleibt keine andere Richtkraft übrig, als die, welche nöthig ist, damit die Nadeln wieder in ihre alte Lage zurückkehren, wenn man sie davon entfernt hat. Die Empfindlichkeit dieses Apparates ist so gross, dass die Magnetnadel, wenn man sie über einer messingenen getheilten, mit einem Querstück von demselben Metall versehenen Scheibe oscilliren lässt, sich immer in der Richtung dieses Querstückes in Ruhe stellt. Desshalb brauche ich eine gläserne Scheibe. Ich nehme ferner zum Galvanometer statt eines einzigen Fadens von Kupfer drei von demselben Metall, die sich an Länge und Dicke gleichen, auf einerlei Weise mit Seide übersponnen, und gewunden sind. Leitet man durch jeden einzelnen Draht dieselbe Electricitätsmenge, so hat man offenbar drei vollkommen glei-

che Ströme, und die dadurch hervorgebrachte Ablenkung gilt dreimal mehr als die, welche ein Strom erzeugt. Aendert sich die Menge der Electricität, die jeden Draht durchströmt, so kann man auf diesem Wege eine Reihe von Beobachtungen erhalten, nach denen man eine Tafel zu construiren im Stande ist, in welcher die jedem electrischen Strome entsprechende Ablenkung der Magnetnadel angegeben ist.

Um sich electrische Ströme von gleicher Intensität zu verschaffen, löthe man an die beiden Enden jedes Kupferdrahtes einen Eisendraht, so dass man drei geschlossene Ketten erhält, krümme jede dieser Ketten an jeder Löthstelle auf gleiche Weise, um das gekrümmte in eine einerseits geschlossene Glasröhre schieben und in ein Quecksilberbad tauchen zu können, dessen Temperatur man mittelst einer Weingeistlampe erhöht. Ein auch in das Quecksilber gesenktes Thermometer zeigt die Variationen der Temperatur an. Seebek hat gezeigt, dass die Magnetnadel nach Massgabe der Erwärmung von der Lage ihres Gleichgewichtes abgelenkt wird; unterwirft man daher nach und nach eine Löthstelle, dann zwei etc. dem Versuche und merkt für jeden Fall bei derselben Temperatur die Ablenkung der Magnetnadel, so lernt man die Winkel kennen, die einer einfachen, doppelten etc., Kraft entsprechen.

Soll man aber auf diesem Wege vergleichbare Resultate erhalten, so muss man die grösste Vorsicht brauchen. Zuerst muss man die Löthstelle, welche nicht erwärmt wird, in schmelzendes Eis eintauchen, die Dicke der Glasröhre, worin sich die andere befindet, soll nahe der des Thermometers gleich seyn,

um in beiden zugleich dieselbe Temperatur zu haben, Die Erfahrung lehrt, dass ein Quecksilberbad wegen der grösseren Leitungsfähigkeit für die Wärme einem Oehlbade vorzuziehen sey; auch dürfen die Drähte im gekrümmten Theile, der erwärmt wird, keinen anderen Berührungspunct haben, als wo sie zusammengelöthet sind, um nicht etwa die Stärke des Stromes zu modificiren. Desshalb umwickelt man sie auch mit Seide. Um endlich an der Löthstelle und im Thermometer einerlei Temperatur zu haben, erhöht man diese nahe bis an den Punct, wo der Versuch gemacht werden soll, und nimmt dann schnell die Lampe weg. Da bleibt nun die Temperatur einige Secunden stationär, und man ist der Gleichheit der Temperatur im Thermometer und in der Löthstelle sicher. Durch dieses Verfahren erhielt ich folgende Resultate:

Temperaturen	Ablenkung der Magnetnadel			
	mit 1 Draht	mit 2 Dräht.	mit 3 Draht.	mit 4 Dräht.
10°	1°.30	2°.60	3°.90	5°.20
20	2 .60	5 .30	7 .80	10 .10
30	4 .00	7 .65	10 .55	13 .25
40	5 .40	10	13 .35	16 .50
50	6 .65	11 .75	15 .40	19 .40
60	7 .90	13 .50	17 .50	21 .50
80	10 .30	16 .50	21 .00	25 .00
90	11 .10	17 .65	22 .35	26 .00
100	11 .90	18 .80	23 .75	28
110	12 .55	19 .90	25 .60	29 .17
120	13 .20	21 .00	26 .50	30 .35
130	14 .00	22	27 .30	31 .17
140	14 .75	23	28	32 .00
160	15 .50	24	29 .40	33 .25
200	16 .90	25	30	35 .25
300	17 .80	26 .50	31 .10	—

Man sieht hieraus, dass innerhalb 0° und 10° die Ablenkungen der Zunahme der Wärme proportionirt sind, dass aber dieses Verhältniss über diese Grenze hinaus nicht mehr Statt findet.

Setzt man nun, die Ablenkung von 1°.30 sey einer electro-dynamischen Kraft 2 gleich, so wird die Ablenkung bei 2°60 einer Kraft 4 und die von 3.90 einer Kraft 6 entsprechen etc. Fährt man mit dieser Schlussweise fort, und setzt jeder Ablenkung die Zahl gegenüber, die ihr entspricht, so erhält man, in der Voraussetzung, dass bei derselben Temperatur die Kraft mit der Anzahl der Ketten im geraden Verhältnisse steht, folgende Tafel:

Temperaturen	1 Draht		2 Drähte		3 Drähte		4 Drähte	
	Ablenkung	Kraft	Ablenkung	Kraft	Ablenkung	Kraft	Ablenkung	Kraft
5°	0°.65	1	1°.30	2	1°.95	3	2°.60	4
10	1 .30	2	2 .60	4	3 .90	6	5 .20	8
15	1 .95	3	3 .95	6	5 .85	9	7 .60	12
20	2 .60	4	5 .30	8	7 .80	12	10 .10	16
30	4 .00	6	7 .65	12	10 .55	18	13 .25	24
40	5 .40	8	10 .00	16	13 .35	24	16 .50	32
50	6 .85	10	11 .75	20	15 .40	30	19 .00	40
60	7 .90	12	13 .50	24	17 .50	36	21 .50	48
70	9 .00	14	15 .00	28	19 .25	42	23 .25	56
80	10 .30	16	16 .50	32	21	48	25 .00	64
90	10 .90	18	17 .65	36	22 .50	54	26	72
100	11 .90	20	18 .80	40	24 .00	60	28	80
110	12 .55	22	20 .00	44	25 .30	66	29 .15	88
120	13 .20	24	21 .20	48	26 .50	72	30 .10	96
130	14 .00	26	22 .19	52	27 .30	78	31 .17	104
140	14 .75	28	23 .00	56	28 .30	84	32	112
150								
160	15 .50	30	24	60	29 .40	90	33 .25	120
180								
200	16 .90	32	25	64	30	96	35 .15	128
250								
300	17 .80	36	26 .50	72	31 .21	108		

Die Zahlen, welche die Ablenkung der Magnetnadel ausdrücken, sind die mittleren arithmetisch proportionirten aus einer grossen Anzahl von Versuchen. Bei den Zahlen, welche die Intensität des electrischen Stromes ausdrücken, sind die Brüche weggelassen, weil ihnen ohnehin nur Decimaltheile von Ablenkungen entsprechen.

Der zweite Theil enthält die nöthigen Data zur Vergleichung der electro-dynamischen Kräfte, die eine Ablenkung hervorbringen, welche nicht 35° übersteigt; man darf aber nicht glauben, dass diese Resultate für alle Apparate gelten, denn das Verhältniss zwischen der Ablenkung und der electrischen Kraft ändert sich mit der Einrichtung, Gestalt und Empfindlichkeit des Apparates, und muss für jeden derselben eigens bestimmt werden.

Nun ist es leicht einzusehen, was in einer Kette erfolgen muss, die aus zwei Kupfer- und Eisendrähten besteht, die mit den Enden zusammengelehnt sind, und in denen jede Löthstelle eine andere Temperatur hat. Der erste Theil der hier folgenden Tafel enthält die Resultate, die hervorgehen, wenn man abwechselnd die Temperatur einer Löthstelle von 0° bis 250° erhöht, während die der anderen beständig = 0° ist, der zweite und dritte diejenigen, welche man erhält, wenn man die Löthstelle, welche vorher die Temperatur = 0° hatte, auf 50° auf 100° erhöht.

Temperaturen.		Ablenkung der Magnetnadel.	Stärke der electro-dynamischen Kraft.
1. Löthstelle.	2. Löthstelle.		
50°	0		
100	—	7.15	11
150	—	12.75	22
200	—	16.00	31
250	—	18.00	37
300	—	19.00	40
50	50	—	—
100	—	7.25	11
150	—	11.75	20
200	—	14.00	26
250	—	15.25	29
30	—	16	30.50
50	—	—	—
100	100	—	—
150	—	6	9
200	—	9.50	15
250	—	11	18
300	—	—	—

Man sieht hieraus, dass die electro-dynamische Kraft 11, welche bei den Temperaturen 100 und 50 hervorgebracht ist, der Differenz der Kräfte 22 und 11 gleicht, welche bei den Temperaturen 100 und 50 an derselben Löthstelle hervorgebracht wurden. Eben so ist die Kraft 20 gleich der Differenz der Kräfte, welche bei den Temperaturen 150° und 50 erzeugt wurden, und die Kraft 9 gleich der Differenz der bei den Temperaturen 150 und 100 hervorgerufenen Kräfte.

Hieraus kann man die allgemeine Regel abnehmen, dass in einer Kette aus zwei Metallen, die an ihren Enden an einander gelöthet sind, die Intensität der electro-dynamischen Kraft, welche aus der Temperaturverschiedenheit der einzelnen Löthstellen hervorgeht, dem Unterschiede jener Kräfte gleich sey, die successiv durch jede dieser Temperaturen hervorgerufen wird, wenn eine Löthstelle diese, die andere die Temperatur = o hat, keineswegs aber der Kraft, welche durch die Temperaturdifferenz allein hervorgebracht wird. Ueber die Genauigkeit dieser Resultate wird man keinen Zweifel erheben können.

Da nun der electrische Zustand jeder Löthstelle von ihrer Temperatur abhängt, und nicht von der der angränzenden Theile, so kann man sich eine Tafel wie die zweite construiren, ohne vier Drähte anwenden zu dürfen. Ich habe vier Kupfer- und eben so viele Eisendrähte von 5 Decimeter (19 Z.) Länge und ⅓ Millimeter Dicke mit ihren Enden abwechselnd aneinander gelöthet, so dass auf Eisen immer Kupfer folgte, und sie mit den zwei Enden des vorhin besprochenen Apparates verbunden, dann abwechselnd eine, zwei etc. Löthstellen gleich stark erwärmet, jedoch so, dass der electrische Strom in allen dieselbe Richtung hatte, und auf diese Weise eine einfache, doppelte, dreifache etc. electro-dynamische Kraft erhalten.

2.

Gesetze, welche die Berührungselectricität befolgt, wenn die Temperatur jedes Metall auf gleiche Weise ändert.

Es ist nach dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft unmöglich, die absolute Menge der Electricität zu bestimmen, welche sich bei der Berührung zweier Metalle entwickelt, oder wenigstens die aus der Berührung desselben Metalls mit mehreren anderen hervorgehende zu vergleichen. Dazu würde erfordert, dass man beide Metalle mit einem guten Leiter der Electricität verbinden könnte, der keine electromotorische Kraft auf sie ausübt; aber mit Hülfe des vorausgegangenen kann man erkennen, welche Modificationen der electrische Zustand, den zwei Metalle von der Temperatur = o erleiden, wenn man ein Metall erwärmt oder das andere erkältet. Dieses ist der einzige Weg, auf dem man kennen lernt, was mit der Contactelectricität bei der Erwärmung bis zum Momente der Verbindung der Metalle vorgeht.

Es wurde aus verschiedenen Metallen eine Kette gebildet, an der auch der Draht des vorhin besprochenen Apparates Theil nahm, und alles so eingerichtet, dass die beiden Enden mit demselben Metalle communicirten, und dadurch seine Wirkung auf die zu untersuchenden Körper aufzuheben, dann die Temperatur erhöht und verfahren, wie vorhin gesagt wird.

Auf diesem Wege erhielt man folgende Resultate:

Metalle.	Temperatur.	Ablenkung.	Stärke des electrischen Stromes.	Differenzen in der Stärke beobachtete	Differenzen in der Stärke berechnete
Eisen in Berührung mit Kupfer	50	7.50	11	11	
	100	12.25	22	9	
	150	16.00	31	3	
	200	17.25	34	3	
	250	18.10	37		
Gold	100	11.00	18	6	
	150	13.50	24	3	
	200	14.50	27	3	
	250	15.50	30		
	300	—	—		
Silber	40	5.80	8.50	7.50	
	80	10.00	16.00	6	
	120	12.50	22.00	—	
	140	—	—	—	
	200	15.75	30	—	
	250	—	—		
Platin	40	6.50	10	10	
	80	11.50	20	10	
	120	15.10	30	9	
	160	18.50	39	10	
	200	21.60	50	10	
	250	24.00	60	9	
	300	25.50	69		
Platin in Berührung mit Blei	50	1	1.50	—	—
	100	2.00	3.00	3	3
	150	3.75	6.00	4.50	4.25
	200	7.00	10.50	5.50	5.50
	250	10.00	16.00	7.00	6.75
	300	12.75	23		
Zink	50	2	3	3	
	100	4.50	6.7	3 7	3.4
	150	8	12	5.5	5.5
	200	11.50	19.00	7.00	7.6
	250	14.75	28.00	9.00	9.7
	300	19	70	12	11.80

Metalle.	Temperatur.	Ablenkung.	Stärke des electrischen Stromes.	Differenzen in der Stärke	
				beobachtete	berechnete
Platin in Berührung mit Kupfer	50	1.20	2	3	3
	100	3.15	75	4	4.40
	150	6.00	9	6	5.80
	200	9.50	15	7	7.20
	250	12.50	22	9	8.60
	300	14.00	31	7	
	350	18.75	40		
Gold und Silber	40	1.50	3	3	10.00
	80	3.50	6	3	—
	120	6.10	9	5	3
	160	8.50	14	4	4.10
	200	11.25	18	6	5.20
	240	13.75	26	6	6.00
	280	16.00	32	8	7.40
	320	18.50	40		8.50
Eisen	40	6.50	10	10	10
	80	11.50	20	10	10
	120	16.10	30	8	10
	160	18.10	38	11	5
	200	20.35	49	5	5
	250	22.35	54	6	
	300	24.10	60		
Palladium	40	3	5	—	
	80	8.25	12	8	
	120	11.80	20	8	
	160	15.00	28	8	—
	200	17.75	36	8	—
	240	20.25	44	8	—
	280	22.55	52		—
Kupfer in Berührung mit Silber	40	0.35	0.5		
	80	0.70	1.00		
	120	1.05	1.50		
	160	1.45	2.00		
	200	1.75	3		
	240	2.15	3.50		
	280	2.45	4.00		

Metalle.	Temperatur.	Ablenkung.	Stärke des electrischen Stromes.	Differenzen in der Stärke	
				beobachtete	berechnete
Kupfer in Berührung mit Zinn	50	0.50	1		
	100	1.25	2	1	
	150	2.50	4	2	
	200	3.80	6	2	
	250	5.00	8	2	
	300	—	—	—	
Blei	50	0.5	1	1	
	100	1.25	2	2	
	150	2.50	4	2	
	200	3.80	6	2	
	250	5.00	8		
Zink	50	1.25	2		
	100	2 75	4	2	2
	150	4.50	7	3	3
	200	7.	10.50	3.50	4
	250	9 50	15.00	4.50	5
	300	12	21.00	6	6
	350	14.50	27.00	6	7

Aus dieser Tafel sieht man, dass Eisen stets positiv ist mit Platin, Kupfer, Gold, Silber, und daher steigert die Temperaturerhöhung die electrische Wirkung der sich berührenden Metalle; denn sonst müsste die stärkste positive Electricität durch die niedrigste Temperatur erzeugt worden seyn, und der electritrische Strom hätte seine Richtung ändern müssen. Die durch Berührung des Kupfers mit den anderen oben angezeigten Metallen erregte Electricität wächst von 0° bis 140° in gleichem Verhältnisse mit der Temperatur; von 140° an nimmt dieser Wachsthum schnell ab und isi bei 300° kaum mehr merklich.

Diese merkwürdige Thatsache liess auch glauben, dass über diese Temperatur hinaus der electrische Strom seine Richtung ändert und in der That fand ich die Ablenkung nach entgegengesetzter Richtung, als ich die Schliessungsdrähte der Kette in eine Flamme hielt, um sie sehr zu erhitzen.

Gold, Silber verhalten sich bei der Berührung mit Eisen fast auf gleiche Weise, es hört nur in jedem die Proportionalität zwischen der Wärmezunahme und der electro-dynamischen Kraft bei einer anderen Temperatur auf.

Das Verhalten des Eisens in Berührung mit anderen Metallen, wenn seine Temperatur sich ändert, steht mit der electro-chemischen Theorie in offenbarem Widerspruche, weil diese voraussetzt, dass die electrischen Wirkungen mit der Temperaturerhöhung bis zum Augenblick der chemischen Verbindung steige.

Platin verhält sich in Berührung mit Kupfer, Gold, Silber, Blei, Zink und Palladium nicht so wie Eisen. Es bleibt bei jeder Temperatur negativ electrisch, daher wächst der electrische Strom mit der Temperatur, doch geht diese Zunahme nicht so vor sich, wie man glauben möchte. Von 0° bis 350° stehen die Differenzen der Zunahme der electrischen Kräfte für gleiche Temperaturzunahmen in einer arithmetischen Reihe.

Palladium befolgt dasselbe Gesetz. Auch Kupfer und Zink entziehen sich demselben nicht, auch bei ihnen wachsen die electrischen Wirkungen mit der Temperatur, und die Differenzen ihrer Zunahmen stehen in einer arithmetischen Reihe. Bei Kupfer in Berührung mit Zinn, Blei und Silber folget diese Zu-

nahme auf dieselbe Weise, weil sie aber schwach sind, so mögen immerhin Abweichungen Statt finden, welche der Apparat nicht angibt.

Die Verminderung der Temperatur bringt Wirkungen hervor, welche den durch Erhöhung derselben erzeugten analog sind. Ich nahm eine Kette aus zwei Drähten, wovon einer aus Kupfer, der andere aus Platin bestand, tauchte eine Löthstelle in schmelzendes Eis, die andere in eine Mischung aus Schnee und verdünnter Schwefelsäure, und erhielt folgende Resultate:

Temperaturen unter 0°.	Ablenkungen der Magnetnadel.	Berechnete Stärke der electro - dynamischen Kraft.	Beobachtete Stärke der electro - dynamischen Kraft.
4	2.60	4	3.4
8	4.70	7	6.8
12	7	10	10.2
16	8.50	13	13.60
20	10	16	17.00
24	12	20	20.40
28	13.50	25	23.80
32	14.75	28	27.20

Hier biethet sich von selbst die Frage dar, wie es kommt, dass bei der innigen Verbindung, die man zwischen der Electricität durch Berührung und den chemischen Kräften annehmen zu müssen glaubt, diese Electricität bei der Temperaturerhöhung nicht schneller zunimmt und daher die electrische Action im Augenblick, wo die chemischen Kräfte so schnell wachsen, nicht stärker ist. Diese Frage dürfte schwer zu beantworten seyn. Ferner wie es kommt,

dass das Eisen in Berührung mit anderen Metallen bei der Temperaturerhöhung einen entgegengesetzten electrischen Zustand annimmt. Wahrscheinlich ist das Eisen nicht das einzige Metall, bei dem dieses Statt hat. Macht man aus verschiedenen Metallen electrische Ketten, so dass deren in jeder zwei verschiedene vorkommen, erhöht die Temperatur einer Löthstelle oder des Punctes, wo sie sich berühren, so findet man, dass die Metalle auf folgende Art sich an einander reihen, wobei jedes Metall gegen ein nachfolgendes negativ, gegen ein vorhergehendes positiv electrisch ist:

Wismuth	Silber
Platin	Kupfer
Quecksilber	Zink
Blei	Eisen
Zinn	Spiessglanz
Gold	

Man kann hieraus den Schluss ziehen, dass Zink und Kupfer, wenn sie in einer geschlossenen Kette vorkommen, durch gegenseitige Berührung einen electrischen Strom entstehen machen, der eine desto grössere Intensität hat, je höher die Temperatur ist.

Man könnte vielleicht glauben, dass die Temperaturerhöhung die Leitungsfähigkeit der Metalldrähte vermindere, und dass der Apparat desshalb nicht die ganze Zunahme der electro-dynamischen Kraft, die bei der Temperaturerhöhung eintritt, anzeigen kann; aber diese Meinung widerlegt die Erfahrung; denn arbeitet man bei mittleren Temperaturen, bei denen hinlängliche Wirkungen Statt finden, und lässt den einen Theil der Kette roth glühend werden, der von einer Löthstelle entfernt ist, so wird das Leitungsver-

mögen nicht um so viel schwächer, dass dadurch die Ablenkung geändert werden könnte. Diese Thatsache scheint mit Davy's Beobachtung im Widerspruch zu stehen, der fand, dass ein Leitungsdraht desto weniger Electricität durch sich gehen lässt, je mehr sich ein Theil der Kette der Rothglühhitze nähert; allein man kann sie mit ihm in Einklang bringen, wenn man bedenkt, dass Davy gezeigt hat, die kleinste Aenderung in der Leitungsfähigkeit eines Drahtes müsse die von ihm abgeleitete Electricitätsmenge abändern, wenn man eine so grosse Menge derselben in den Draht leitet, dass er sie nicht ableiten kann, während bei einer nicht so grossen Menge der Electricität die Verminderung der Leitungsfähigkeit darauf keinen Einfluss hat.

Es sind nun keineswegs die electrischen Wirkungen aller Metalle bei der Temperaturänderung untersucht worden; so delicate Versuche fordern mehr Zeit und Material, als mir zu Gebote stand. Ich wollte aber doch das, was ich fand, der Akademie vorlegen, weil es über die Phänomene, die mit den chemischen Wirkungen innig verbunden zu seyn scheinen, einiges Licht verbreitet.

3. Bestimmung hoher Temperaturen.

Aus dem Vorhergehenden hat man gesehen, dass die Electricität einer electrischen Kette aus Palladium und Platin, deren eine Löthstelle die Temperatur 0° hat, während die andere successiv bis 350° erhöht wird, für gleiche Wärmezunahmen um gleich viel wächst. Man kann leicht beweisen, dass diese Eigenschaft auch einer Kette aus zwei Platindrähten von

was immer für einem Durchmesser zukommt, die nicht aus einerlei Platin bestehen. Schneidet man einen Platindraht entzwei, und zieht einen Theil davon mittelst eines Zieheisens in einen dünneren Draht aus, verbindet dann wieder beide Stücke mit einander, indem man sie an den Enden über einander windet, bringt dann eine der beiden Verbindungen auf eine bestimmte Temperatur, so äussert sich keine electrische Wirkung; schmilzt man aber ein Stück irgend eines Metalles an einem Ende des Drahtes an, so zeigt sich alsogleich ein electrischer Strom, und dasselbe findet Statt, wenn die Kette aus zwei Drähten gebildet ist, die nicht aus demselben Platin bestehen. Es macht also die geringste Differenz im Platin beider Drähte einen electrischen Strom entstehen, wenn beide an der Berührungsstelle einerlei Temperatur haben. Die Drähte sollen aber vorläufig in kochende Salpetersäure getaucht seyn, um nicht in Gefahr zu kommen, dass fremdartige, am Platin hängende Körper diesen Effect hervorbringen.

Es scheint, als sey die Temperatur eines Körpers, bei welcher der Wachsthum der electrischen Kraft dem der Temperatur proportional zu seyn aufhört, desto höher, je höher der Schmelzpunct desselben liegt; da nun Platin nur bei sehr hoher Temperatur schmilzt, und bei dünnen Metallen das Gesetz der Abnahme nicht sehr schnell erfolgt, so kann man annehmen, dass in einer Kette aus zwei Platindrähten, die nicht von demselben Stücke sind, obige Proportionalität noch bei sehr hohen Temperaturen Statt findet, wenn sie von der Schmelzhitze weit entfernt sind. Diese Eigen-

schaft dient uns, um die Rothglühhitze durch eine Function aus Thermometergraden auszudrücken.

Ich will, um die Anwendung dieser Methode zu zeigen, die Temperatur bestimmen, welche zwei auf die angegebene Weise eingerichtete Platindrähte annehmen, wenn man successiv die Verbindungspuncte in verschiedene Stellen einer Weingeistflamme eintaucht.

Man weiss im Allgemeinen, dass eine Flamme, besonders die einer Kerze oder einer Weingeistlampe aus mehreren Abtheilungen besteht, wovon man leicht vier unterscheidet: 1) Die unterste blaue, die sich desto mehr verdünnt, je mehr sie vom Docht absteht. 2) Den dunklen Raum in der Mitte der Flamme. 3) Die helle Einfassung, welche letzteren umgibt und die eigentliche Flamme ausmacht; endlich 4) die wenig leuchtende Hülle der Flamme.

Hält man eine Verbindungsstelle beider Drähte in die obere Grenze der blauen Flamme, wo die mit Sauerstoff versehene Luft der Flamme zuerst begegnet, so findet man eine Ablenkung von 22°,50, taucht man sie in den weissen Theil, oder in die eigentliche Flamme, so beträgt die Ablenkung 20°, im dunklen Raume um den Docht nur 17°. Erhöht man die Verbindungsstelle auf 300°, so beträgt die Ablenkung 8° und entspricht der Kraft 12, woraus ich schliesse, dass die Kräfte in den drei vorhin erwähnten Stellen durch die Zahlen 54, 44, 32 und die Temperaturen durch 1350°, 1080°, 780° ausgedrückt werden, vorausgesetzt, dass 48 durch eine viermal grössere Kraft ausgedrückt wird. Es ist daher 1350° die höchste Temperatur, die ein Platindraht von ¼ Millim. Dicke in

einer Weingeistflamme annehmen kann, und diese entspricht genau der blauen Zone, welche den hellsten Theil der Flamme berührt, wo man auch sonst die grösste Wärme annahm. Die Temperatur 78° kann nicht die des Drahtes im dunklen Theil der Flamme nächst dem Dochte seyn, weil der Draht von der hellen Einfassung Wärme aufnimmt. Es ist diese Temperatur zu hoch.

Um mich von der Genauigkeit dieses Gesetzes zu überzeugen, welches mir zur Bestimmung der Temperatur der Theile einer Flamme oder des darin gehaltenen Drahtes diente, arbeitete ich mit Platindrähten von beliebigem Durchmesser, der aber kleiner war als $\frac{1}{3}$ Millim. und die nicht so viel Legirung enthielten, fand aber immer dieselben Resultate. Wäre dieses Gesetz nicht genau, so würde sich gewiss bei Drähten mit verschiedenen Legirungen eine Abweichung gezeigt haben. Die Vergleichung dieser Resultate mit den nach anderen Methoden erhaltenen können wohl zur Berichtigung der Ideen über eine so wichtige Frage beitragen.

Bei der Fortsetzung dieser Versuche wird man gewiss neue Eigenschaften entdecken, welche die gemachte Voraussetzung noch rectificiren werden, und so einen Ausdruck finden, wodurch hohe Temperaturen durch Functionen von Thermometergraden gegeben werden.

VI. Neue optische Instrumente.

1.

Ein neues reflectirendes Telescop von Dick.

(The Edinb. new philos. Journ. Nr. I. p. 41.)

Dick hatte sich mehrere kleine Gregorianische Fernröhre construirt, und sich immer in seinen Erwartungen über ihre Wirkung getäuscht gefunden. Er änderte nach und nach den Bau dieser Instrumente ab, und so gerieth er auf folgende Einrichtung:

AB (Fig. 19) ist eine kurze Röhre, die den Hohlspiegel enthält, CD der Arm, der das Ocularstück trägt, und aus zwei Stücken von Mahagony besteht. D lässt sich längs C verschieben, und wird durch die Klammern E und F darangedrückt. An F befindet sich nach abwärts eine Schraubenmutter, in welche die Schraubenspindel ab passt, welche mittelst des Knopfes c umgedreht werden kann, und dazu dient, dem Oculare die gehörige Entfernung vom Spiegel zu geben. GH enthält die Oculare, wird durch den Stift d getragen, der selbst wieder durch eine Oeffnung in D geht, und sowohl aufwärts als abwärts geschoben, und in jeder Lage befestiget werden kann. Die Röhre GH ist, wie die zu einem kleinen achromatischen Erdfernrohre gehörigen, eingerichtet. Macht man sie wie zu einem astronomischen Fernrohr, so reicht sie nur bis J. Die Spiegel, welche Dick zu solchen Instrumenten anwendete, waren von Gregorianischen Fernröhren genommen, hatten also alle in der Mitte ein Loch. Das Ocular ward auf einen Punct des Spiegels nicht weit von diesem Loche gerichtet. Wenn

man dieses Instrument auf einen Gegenstand richten will, so bringt man das Auge nach H und sieht längs des Armes nach dem Ocularstücke hin, bis es mit dem Gegenstande zusammenfällt, und man hat meistens schon die rechte Stellung. Durch dieses Mittel lässt es sich gegen Saturn, Jupiter, und jeden anderen mit freiem Auge sichtbaren Planeten leicht stellen, wenn man eine 170 bis 180fache Vergrösserung daran anbringt. Bei starken Vergrösserungen aber ist es gut, einen Sucher, wie bei dem Newton'schen Telescope anzubringen.

Dick rühmt folgende Eigenschaften seines Fernrohres:

1. Es ist sehr einfach, und kann mit wenig Kosten gebaut werden; denn es hat statt der weiten und langen Röhre, wie sie bei Newtons und Gregoris Fernröhren gebraucht werden, nur ein kurzes 2—3 Z. langes Rohr, das den Spiegel enthält, und einen der Brennweite des Spiegels entsprechenden Arm.

2. Man kann damit Himmelskörper in einer grossen Höhe leichter beobachten, als mit einem anderen Telescope. Beobachtet man mit einem Gregorianischen oder einem achromatischen Telescope von 4—5 F. Länge ein Object, das 50 oder 60° über dem Horizonte steht, so muss der Körper des Beobachters eine sehr unbequeme Lage annehmen; mit diesem Fernrohre kann man dasselbe leisten bei einer Lage, als wenn man ein Buch läse, und desshalb 1—2 Stunden lang ohne Ermüdung denselben Körper ansehen, und allenfalls eine Zeichnung davon entwerfen. Um bei jeder Position des Körpers beobachten zu können, braucht man nur einen kleinen Tisch, der sich erhö-

hen und erniedrigen lässt, als Basis für das Instrument. Ist dieses 5—6 F. lang, und steht das zu beobachtende Object sehr hoch, so stellt man es auf den Fussboden, und stellt sich aufrecht vor dasselbe.

3. Dieses Instrument ist auch kürzer als ein Gregorianisches. Wendet man ein astronomisches Ocular an, so beträgt die gesammte Länge desselben nicht viel mehr als die Brennweite des Spiegels.

4. Es hat mehr Lichtstärke als ein Gregorianisches, weil es nur einen Spiegel hat, und desshalb nicht so viel Licht verliert, wie jenes.

5. Es zittert das Bild nicht so sehr, wie in einem Gregorianischen. Dieses Zittern kommt wahrscheinlich von der Elasticität des Trägers des kleineren Spiegels, der nur an einem Ende befestiget ist.

Dick hat versucht, ein solches Fernrohr mit einem halben Spiegel zu versehen, und sich überzeugt, dass ein solcher ohne besonderen Lichtverlust gewählt werden kann. Wollte man aber besonders auf Ersparung ausgehen, so könnte man mit einem ganzen Spiegel für zwei Telescope ausreichen. Dick hat auch durch ein solches Fernrohr mit einem Glasspiegel bei einer 12 — 20 maligen Vergrösserung entfernte Gegenstände ziemlich deutlich und wohl begrenzt gesehen.

2.

Neues Photometer nach Bouguers Grundsätzen von Ritschie.

(Edinb. journ. of science, Nr. IX. p. 129.)

Dieses Instrument besteht aus einer rechteckigen Büchse ABCD (Fig. 20) von 1 — 1½ Zoll, die auf bei-

den Seiten offen und inwendig zur weiteren Abhaltung alles falschen Lichtes geschwärzt ist. In dieser Büchse befinden sich zwei rechtwinkelige Stücke von Planspiegeln CF und FD, die gegen einander unter einem rechten Winkel, mithin gegen die Seiten der Büchse unter 45° geneigt sind. An der oberen Seite der Büchse befindet sich eine rechtwinkelige Oeffnung EG, die etwa einen Zoll lang und ⅜ Z. breit, und mit geöhltem Papier bedeckt ist. Die beiden Spiegel sollen aus einem einzigen grösseren Stücke geschnitten seyn, um ein vollkommen gleiches Reflexionsvermögen zu besitzen, und die rechtwinkelige Oeffnung soll eine kleine Scheidewand F von geschwärztem Papier haben, damit sich das Licht von den beiden Spiegeln nicht mit einander vermengen kann, und nicht etwa dadurch das Resultat unrichtig werde.

Beim Gebrauche stellt man das Instrument mitten zwischen zwei Kerzenlichter, die 6 oder 8 F. von einander entfernt sind, so, dass die beiden Spiegel gegen sie gekehrt sind. Hierauf entfernt oder nähert man jede dieser Kerzen dem Instrumente so lange, bis das Papier an der rechtwinkeligen Oeffnung zu beiden Seiten der Scheidewand gleich stark beleuchtet ist. Dann verhalten sich die Lichtstärken der Flammen, wie verkehrt die Quadrate ihrer Entfernungen vom Instrumente. Es ist sehr gut, wenn man das Instrument auf die Mitte eines Bretes stellt, das der Länge nach in gleiche Theile getheilt ist, um die Entfernung der Kerzen vom Photometer gleich angeben zu können.

Das beleuchtete Papier sieht man am besten durch

eine etwa 8 Z. lange Röhre an, die inwendig geschwärzt ist, damit nur das Licht ins Auge gelange, welches durch das Papier geht. Statt der beiden Spiegel kann man auch weisses Papier oder ein glattes Stück Holz nehmen, das wie die Spiegel einen rechten Winkel macht. In diesem Falle braucht man die Oeffnung an der Seite nicht mit geöhltem Papier zu überziehen. Dieses Instrument ist einfacher als das vorige, und gewährt in manchem Falle entschiedene Vortheile. Wie auch immer das Instrument eingerichtet wird, so muss man doch, um genaue Resultate zu erlangen, die Vorsichtsmassregel anwenden, dass man das Instrument um seine Axe dreht, und bald diesen bald jenen Spiegel gegen einen bestimmten Spiegel zu wendet, und aus mehreren Beobachtungen das Mittel nimmt.

Wenn zwei Flammen eine verschiedene Farbe haben, hält es schwer, die Entfernung zu finden, bei der sie das Photometer gleich beleuchten. Mehrere Beobachtungen geben aber auch in diesem Falle einen Mittelwerth, der sich der Wahrheit sehr stark nähert.

3.

Das Thaumatrop von Dr. Paris.

(Edinb. journ. of science. Nr. VII. p. 87.)

Es ist bekannt, dass eine Lichtempfindung im Auge längere Zeit anhält, als der leuchtende Körper auf dasselbe einwirkt. Aus diesem Grunde erscheint uns eine glühende im Kreise geschwungene Kohle wie ein leuchtender Ring, und aus derselben Ursache bildet eine Sternschnuppe beim Herabfallen einen lan-

gen leuchtenden Streifen. Das Instrument, wovon hier die Rede ist, beruht auch auf diesem Grundsatze, und besteht aus einer kreisförmigen Scheibe von Papier, die sich um einen ihrer Durchmesser wie um ihre Axe schnell drehen lässt. Auf jede der zwei Seiten dieser Scheibe mahlt man einen Gegenstand, so, dass beide zusammen einen dritten geben, welches z. B. der Fall ist, wenn sich auf einer Seite ein Käfig, auf der anderen ein Vogel befindet; dreht man nun die Scheibe sehr schnell, so sieht man diesen dritten Gegenstand, im gegebenen Falle, den Vogel im Käfig, weil im Auge die Empfindung, die ein Gegenstand erregt, noch fortdauert, wenn die Empfindung vom andern beginnt. Es ist klar, dass man dadurch recht artige Erscheinungen hervorbringen kann.

VII. Fortschritte der Physik in der neuesten Zeit.

Hygrometrie.

Verdünstung.

Man muss wohl schon vor undenklichen Zeiten die Bemerkung gemacht haben, dass Wasser und andere tropfbare Flüssigkeiten, die der freien Luft ausgesetzt sind, bei jeder Temperatur nach und nach an Masse abnehmen, und endlich ganz verschwinden; allein man wusste lange nicht, was aus ihnen dabei geworden ist. Man sah wohl, dass kochendes Wasser

in einen expansiblen Körper übergehe, aus dem es sich durch Erkältung oder durch Zusammendrücken wieder herstellen lässt, allein man glaubte nicht annehmen zu dürfen, dass dasselbe auch in einem gewissen Grade bei jeder anderen geringeren Temperatur Statt finde, weil man die Eigenschaften der Dünste, wodurch sie sich von den sogenannten beständig ausdehnsamen Körpern unterscheiden, nicht kannte. Endlich trat im Jahre 1810 Dalton in Manchester mit seinen Versuchen über die Dunstbildung und über die Eigenschaften der Dünste ans Licht, aus denen man deutlich ersehen konnte, dass das oben genannte Verschwinden der Flüssigkeiten in der Luft davon herkomme, weil sie nach und nach in ausdehnsame Körper übergehen, die sich dem Tastsinne und dem Gesichte entziehen. Jede Flüssigkeit, so lehrte er, verdünstet sowohl im luftleeren als in einem mit irgend einer Luftart erfüllten Raume bei jeder Temperatur so lange, bis die bereits schon gebildeten Dünste einen Grad von Spannkraft und Dichte haben, die bei der bestehenden Temperatur nicht mehr vergrössert werden kann, und desshalb gewöhnlich das Maximum der Spannkraft genannt wird. Werden die schon gebildeten Dünste durch einen Luftzug oder auf irgend eine andere Weise weggeführt, oder ihnen nur die Möglichkeit gestattet, sich auszubreiten, so dauert die Verdünstung ohne Unterlass fort, bis die ganze Flüssigkeit den ausdehnsamen Zustand angenommen hat.

In ganz dunstfreier, trockener Luft geht die Verdünstung am schnellsten vor sich, wird aber immer schwächer, so wie sich die Dünste über der Ober-

fläche der tropfbaren, verdünstenden Masse anhäufen, und hört endlich ganz auf, sobald die Dünste ihr Maximum der Spannkraft und Dichte erlangt haben. In diesem Falle sagt man, der Raum sey mit Dünsten gesättiget. Es ist also nicht die Wärme, sondern der Mangel an gehöriger Dunstmenge die Veranlassung zur Verdünstung. Da ein ausdehnsamer Körper aus einem tropfbar flüssigen nur durch Aufnahme einer gewissen Wärmemenge gebildet werden kann, so wird desto mehr Wärme gebunden werden müssen, je schneller die Verdünstung vor sich geht. Ist keine besondere Wärmequelle vorhanden, so muss die verdünstende Flüssigkeit selbst diese Wärme hergeben, und dadurch abgekühlt werden. Daher ist der Unterschied, welcher Statt findet zwischen der Temperatur der Oberfläche einer verdünstenden Flüssigkeit und der des Mittels, worin die Verdünstung vor sich geht, der Menge der in einer gewissen Zeit gebildeten Dünste proportionirt. Auf diesem Grundsatze beruht die mathematische Theorie der Verdünstung, welche Tredgold *) gibt.

Ungeachtet man nach diesen Principien den Einfluss vieler Umstände auf die Grösse der Verdünstung irgend einer Flüssigkeit genau nachweisen kann, so bleibt doch noch manches übrig, dessen Zusammenhang mit dem bekannten Hergange der Sache noch im Dunkeln ist. Von der Art ist der Einfluss fester, in einer Flüssigkeit befindlicher Körper auf die Beschleunigung des Siedens, wie ihn Oersted nachgewiesen hat.

*) Philos. Mag. January. 1826. p. 45. e. s.

Expansivkraft der Dünste.

Mit der Bestimmung der Spannkraft, welche den Dünsten, besonders denen aus Wasser, im Maximo bei jeder gegebenen Temperatur zukommt, haben sich viele verdiente Gelehrte befasst, vorzüglich Betancourt, Schmidt, Dalton, Gay-Lussac, Arxberger, Ure etc. Allein die Resultate aller dieser Versuche stimmen nicht so gut mit einander überein, als es zu wünschen wäre. Uebrigens traut man den von Dalton und Gay-Lussac gefundenen die meiste Annäherung an die Wahrheit zu. Die meisten dieser Versuche erstreckten sich aber nicht weit über die Siedhitze des Wassers, besonders ist dieses mit den Dalton'schen der Fall; desshalb hat man das Gesetz gesucht, nach welchem man aus der für gewisse Wärmegrade bekannten Spannkraft der Dünste dieselbe für jede beliebige höhere oder niedere Temperatur finden könnte; es haben auch mehrere Gelehrte, wie z. B. Mayer, Soldner, Laplace, Poisson, Prony etc. Formeln angegeben, die dieses Gesetz darstellen sollten, allein die Richtigkeit derselben kann man doch nur wieder aus einer Vergleichung zwischen dem Ergebniss eines Versuches und dem für dieselben Umstände aus der Formel abgeleiteten nummerischen Werthe beurtheilen; Versuche bei hohen Temperaturen sind aber schwierig anzustellen und lassen immer im Resultate eine grosse Unsicherheit zurück, welche obige Vergleichung erschwert.

Clemens Desormes *) gibt die Expansivkraft der Wasserdünste auf folgende Weise an:

*) Nouveau Bulletin des sciences. April 1826.

Spannkraft.	Temperatur.
1	106° C.
2	121
3	135
4	145
5	153
6	160
7	166
8	172
9	177
10	182

Als Einheit der Spannkraft ist diejenige angenommen, welche einer Quecksilbersäule von 28 P. Zoll Höhe entspricht.

Da die Dünste des kochenden Wassers eine Spannkraft haben, welche dem Druck der Atmosphäre das Gleichgewicht hält, und dieser Druck abnimmt, so wie man sich von der Erde entfernt, so muss auch die Spannkraft dieser Dünste in der Höhe geringer seyn als unten, und das Wasser muss oben unter 100° C zu kochen anfangen.

Wollaston hat dieses Gesetz benützt, um aus der in irgend einem Orte gegebenen Siedhitze des reinen Wassers den darauf lastenden Luftdruck und dadurch die Höhe des Ortes über der Meeresfläche zu berechnen. Allein abgesehen davon, dass man hierzu Thermometer braucht, die wenigstens Tausendelgrade angeben, wenn man auch nur mässige Höhenunterschiede durch dieses Mittel erkennen will, und dass die Siedhitze einer Flüssigkeit beständig kleinen Oscillationen unterliegt, die durch das Zerplatzen der Dampfblasen erzeugt werden, so hat auch

Murray *) durch Versuche auf hohen Bergen gezeigt, dass auf die Siedhitze des Wassers mehrere schwer zu bestimmende Umstände einwirken, die alle gegeben seyn müssten, wenn man aus ihr die Höhe eines Ortes bestimmen wollte. Bei fünf Versuchen, die er zu Simpoln am Simplon anstellte, zeigten sich folgende Temperaturen des siedenden Wassers.

Die Thermometerkugel	1. Vers.	2. Vers.	3. Vers.	4. Vers.	5. Vers.
berührt die Oberfläche des Wassers	131° F	131° F	124° F	116°,5 F	109°,5 F
ist ganz eingetaucht	135 „	134,5 „	131 „	120,5 „	114,5 „
berührt den Boden des Gefässes	131 „	126 „	126 „	116,5 „	109,5 „

Uebrigens meint Murray, dass diese Temperatur bestimmt werde

1) durch den hygrometrischen Zustand der Luft;

2) durch die Aenderung, welche die Thermometerkugel wegen des verminderten Luftdruckes erleidet;

3) durch die wegen vermindertem Luftdruck erfolgende Vergrösserung des Volumens des Wassers;

4) durch die Tiefe, bis zu welcher die Thermometerkugel eingetaucht ist;

5) durch die Gestalt und das Material und die Tiefe des Gefässes.

6) Falls man den Versuch unter Dach vorstellt, durch den Unterschied zwischen der inneren und äusseren Temperatur;

7) durch den Wind, der die Dichte der Luft ändert;

*) Philos. Mag. March. 1826. p. 201.

8) durch das langsamere oder heftigere Entweichen des Dampfes;

9) durch die Tageszeit.

Die Spannkraft der Wasserdünste musste zwar die Physiker am meisten beschäftigen, weil sie in der Atmosphäre eine grosse Rolle spielen und bei Dampfmaschinen die bewegende Kraft abgeben, allein in theoretischer Hinsicht ist auch die Spannkraft der Dünste anderer Flüssigkeiten von Interesse. Dalton glaubte aus einigen Versuchen schliessen zu können, dass sich aus dem für eine gewisse Temperatur gegebenen Maximum der Spannkraft der Wasserdünste das jeder anderen Flüssigkeit abnehmen lasse, wenn man nur den Grad ihrer Siedhitze kennt. Er meinte nämlich, weil alle Flüssigkeiten in der Siedhitze Dünste von derselben Spannkraft geben, so müssen sie auch unter und über dieser Temperatur gleich expansible Dünste liefern, sobald ihr Temperaturunterschied demjenigen gleich ist, welcher bei ihrer Siedhitze Statt hat. Nach diesem müssten Dünste aus Alkohol, der bei 63° R siedet, bei 20° R ein Maximum der Spannkraft von 35,038 Millimeter geben, weil die des Wassers, das bei 80° siedet, bei 37° d. i, bei einer um 80 — 63 = 17° höheren Temperatur eben so gross ist. Allein aus den von Betancourt angestellten Versuchen haben Alkoholdünste bei 20° R. eine Expansivkraft von 40,875 M. Eben so wenig stimmen die Ergebnisse anderer Versuche, wie sie Watt, Robinson, Schmidt, Munke u. a. angestellt haben, mit dieser Regel überein. Indess ist doch so viel gewiss, dass die Dünste verschiedener Flüssigkeiten bei der-

selben Temperatur eine desto grössere Spannkraft haben, je höher ihr Siedpunct liegt.

Wenn Dünste von verschiedenen Flüssigkeiten, oder Dünste irgend einer Flüssigkeit und Luft mit einander gemengt werden, so behält jeder dieser ausdehnsamen Körper seine ihm eigenthümliche Spannkraft bei, so dass die des Gemenges der Summe der Spannkräfte der Bestandtheile gleich wäre, wenn sie nach der Vermengung noch unter demselben Druck stünden, wie vor derselben; ist dieser geringer, so wird auch die Spannkraft in demselben Verhältnisse kleiner. Nach diesem Grundsatze lehrt Dalton die Raumerweiterung finden, die eine Luftmasse durch Zusatz einer bestimmten Dunstmenge von gegebener Expansivkraft erleidet.

Hygrometrische Mittel.

So lange man die Eigenschaften der Dünste nicht recht kannte, glaubte man nur auf die Dunstmenge n der Luft aus den Veränderungen schliessen zu können, die jene Körper in feuchter Luft erleiden, welche das Wasser aus ihr anziehen. Diesem Umstande verdanken unzählige Hygrometer ihren Ursprung, unter denen aber nur das Saussure'sche und das Deluc'sche einen eigenen wissenschaftlichen Werth haben, wiewohl selbst dieser dadurch sehr gemindert wird, dass in beiderlei Instrumenten organische Stoffe als die Feuchtigkeitszieher angewendet werden, die doch diese Eigenschaft mit der Zeit völlig verlieren, so, dass sie sich in ganz feuchter und in ganz trockener Luft auf gleiche Weise erhalten. Nur wenige Fälle kennt man, wo ein

Menschenhaar, wie es zu dem Saussure'schen Hygrometer gebraucht wird, lange der Einwirkung der Zeit widerstanden hat; und unter diesen ist gewiss der von Pictet *) angeführte der merkwürdigste. Er nahm ein Haar von einer Mumie, die man in Genf aufbewahrt, spannte es mit einem andern frisch zubereiteten in ein Hygrometergestell ein, liess das so entstandene Doppelhygrometer mehrere Male die ganze Scale durchgehen, und bemerkte keinen anderen Unterschied, als dass sich das Haar von der Mumie etwas später ins Gleichgewicht setzte als das andere, wahrscheinlich weil Pictet, aus Furcht ihm die nöthige Haltbarkeit zu benehmen, unterliess, es in einer Lauge zu kochen. Indess darf man diesen Fall nicht als eine Empfehlung der Haarhygrometer überhaupt ansehen, weil ein Haar, das durch Lauge alles Oehls beraubt ist, wie es geschehen muss, wenn man es als hygrometrische Substanz brauchen will, von der Luft und dem Wasser grössere Einwirkungen erleidet, und sich überdiess noch in einem gespannten Zustande befindet.

Heut zu Tage scheinen jene hygrometrischen Vorrichtungen den Vorrang gewinnen zu wollen, welche auf der Eigenschaft der Dünste beruhen, durch einen gewissen Grad der Erkältung in tropfbaren Zustand überzugehen. Von der Art ist das schon allerwärts bekannte Hygrometer von Daniell, das durch Döbereiner und vorzüglich durch Körner eine neue Verbesserung erhielt, und im eigentlichen Sinne den Namen eines Hygrometers ver-

*) Biblioth. univers. Dec. 1824.

dient. Diese Instrumente führen unmittelbar zur Kenntniss der Spannkraft der Dünste in der Luft bei derjenigen Temperatur, wo das Beschlagen eintritt, aus der man leicht die Spannkraft derselben bei der bestehenden Temperatur und auch ihre Menge in einem gegebenen Volumen abnehmen kann.

Dessenungeachtet hat man in der neuesten Zeit noch auf andere hygrometrische Mittel geachtet; Leslie hat das von ihm erfundene Differenzialthermometer zu diesem Zwecke benützt, indem er eine Kugel desselben mit Floretseide umwickelte, sie mit Wasser befeuchtete, und nun aus der Temperaturdifferenz, welche die Verdünstung des Wassers hervorbrachte, auf die in der Luft vorhandene Dunstmenge geschlossen. Anderson *) lehrt nach demselben Grundsatze die Spannkraft der in der Luft vorhandenen Dünste dadurch zu finden, dass man beobachtet, um wie viel ein Thermometer in der Luft, dessen Kugel mit Wasser befeuchtet ist, tiefer steht, nachdem es die stationäre Temperatur erlangt hat, als ein anderes ebenfalls der Luft ausgesetztes aber ganz trockenes.

August **) zeigte nach Gay-Lussac's Untersuchungen über die Verdünstungskälte in trockener Luft, und nach Ivory's Rechnungen, dass die Differenz des feuchten und trockenen Thermometers mit ziemlicher Genauigkeit jedesmal halb so gross ist, wie die Differenz des inneren und äusseren Thermometers im Daniell'schen Hygrometer im Augen-

*) Siehe I. Heft dieser Zeitschrift S. 44 u. f.

**) Poggendorfs Annalen. 1825. S. 9 u. 11.

blicke des Beschlagens. Man kann daher durch ein Instrument, welches aus zwei übereinstimmenden Thermometern besteht, die so hängen, dass sie der Luft freien Zutritt gestatten, und wovon die Kugel des einen mit Musselin umwickelt ist, der in ein Gläschen mit Wasser geleitet wird, leicht die jedesmalige Spannkraft der Dünste erfahren. August nennt dieses Instrument Psychrometer.

La Rive *) hat die Eigenschaft der Schwefelsäure, das Wasser aus der Luft anzuziehen, und sich in Berührung mit demselben zu erhitzen, als ein sehr einfaches Mittel vorgeschlagen, die Spannkraft der Dünste in der Luft zu erfahren. Er taucht die Kugel eines empfindlichen Thermometers in Schwefelsäure, zieht sie heraus, und erschüttert sie ein wenig, damit nur eine dünne Schichte von dieser Säure an ihr hängen bleibe. Das Thermometer steigt alsogleich über den Grad, den es vor dem Eintauchen angab, und erreicht eine gewisse Höhe, von der es wieder zu sinken beginnt. Die Anzahl der Grade, um die es steigt, verhält sich nun nach La Rive's Versuchen zu derjenigen, um die es bei derselben Lufttemperatur in ganz mit Dünsten gesättigter Luft steigt, wie die Spannkraft der Dünste im gegenwärtigen Fall zum Maximum der Spannkraft bei der gegebenen Temperatur. Zeigt z. B. das Thermometer in der Luft 12°, steigt aber, nachdem es mit einer Schichte von Schwefelsäure bedeckt ist, auf $25\frac{1}{2}$°, mithin um $15\frac{1}{2}$°, während es in einer ganz mit Wasserdunst gesättigten Glocke auf 27°, mithin um 15° steigt, so ist $13\frac{1}{2} : 15$ das Verhältniss der

*) Biblioth. univers. 1825. April.

Spannkraft der wirklichen Dünste zu der bei 12° möglichen. Bemerkt man auf der Scale eines Thermometers bei jedem Grade die Anzahl derselben, um welche es von diesem aus steigen würde, wenn es mit Schwefelsäure befeuchtet, in eine mit Dünsten gesättigte Luft getaucht würde; so dürfte man bei jedem Versuche nur die Anzahl der Grade, um die es vermöge der Schwefelsäure stieg, durch diejenige theilen, welche dem Grade beigesetzt ist, der die jedesmalige Lufttemperatur angibt, um die Spannkraft des Wasserdunstes in der Luft im Augenblicke des Versuches zu finden, vorausgesetzt, dass das Maximum der Spannung für diese Temperatur als Einheit angenommen wird. Gay-Lussac *) machte aber gegen die La Rive'sche Theorie dieses Verfahrens den sehr gegründeten Einwurf, dass der Erfinder auf die Luft Rücksicht zu nehmen vergessen habe, die mit dem sich an die Thermometerkugel absetzenden Dunst vermengt ist, und sich auch erwärmt. Denn offenbar muss das Maximum der Erwärmung desto geringer ausfallen, je dichter die an der Erwärmung Theil nehmende Luft ist, und doch ist die Dunstmenge, die eine Portion Luft aufnehmen kann, von ihrer Dichte unabhängig.

Es ist also dieses Verfahren wohl sehr sinnreich, allein es auf eine vollständige Theorie zurückzuführen, würde mehr Arbeit machen, als ihrem Nutzen angemessen wäre.

---

*) Annales de Chimie etc. Tom. 30.

MATHEMATISCHE ABTHEILUNG.

I. Gesetze des Gleichgewichts, auf eine neue Art entwickelt, vom Professor Nörrenberg, Lehrer der Mathematik und Physik an der Grossherzoglichen Militärschule in Darmstadt.

Einleitung.

1. Jede Ursache, welche, auf einen materiellen Punct wirkend, denselben nach einer bestimmten Richtung zu bewegen strebt, nennt man Kraft. Die Richtung, nach welcher die Kraft den Punct zu bewegen strebt, ist die Richtung der Kraft. Der Punct, auf welchen die Kraft wirkt, als Punct einer Linie oder Fläche oder eines Körpers betrachtet, ist der Angriffspunct der Kraft.

2. Materielle Puncte oder Körper, die so mit einander verbunden sind, dass man die Lage des einen nicht auf jede Art verändern kann, ohne dadurch irgend eine Veränderung in der Lage der übrigen hervorzubringen, bilden ein System. Ein System ist unveränderlich, wenn die Entfernungen aller Puncte von einander unveränderlich sind.

3. Ein Punct oder ein System ist beweglich, wenn seine Lage auf irgend eine Art durch die geringste Kraft verändert werden kann; unbeweg-

lich, wenn keine Kraft im Stande ist, seine Lage zu verändern. Die Beweglichkeit eines Systems ist vollkommen, wenn jeder Punct nach jeder Richtung beweglich ist; unvollkommen, wenn einzelne Puncte entweder unbeweglich oder nur auf gewissen Linien oder Flächen beweglich sind. Ein System, dessen Beweglichkeit vollkommen ist, nennt man ein freies System.

4. Wenn mehrere Kräfte zugleich auf ein bewegliches System wirken, ohne dass dadurch seine Lage auf irgend eine Art verändert wird, so ist das System im Gleichgewichte. Das Gleichgewicht eines Systems ist abhängig von der Beschaffenheit seiner Theile, von der Art ihrer Verbindung und Beweglichkeit, von der Grösse und Richtung der darauf wirkenden Kräfte und von der Lage der Angriffspuncte. Die Darstellung der Gesetze dieser Abhängigkeit ist der Gegenstand der Statik, oder, wenn flüssige Körper Theile des Systems bilden, der Hydrostatik.

Gleichgewicht eines freien unveränderlichen Systems.

5. Ein Punct ist mit einem unveränderlichen System fest verbunden, wenn seine Entfernung von allen Puncten des Systems unveränderlich ist. Die einfachste Art der Beweglichkeit eines nicht freien Systems findet Statt, wenn zwei mit demselben fest verbundene Puncte unbeweglich sind. Jede Veränderung seiner Lage ist alsdann nur eine Drehung desselben, um die durch die beiden Puncte bestimmte Achse. Die Bedingungen des Gleichgewichts für

dieses System führen aber, wenn sie allgemein genug ausgedrückt werden, unmittelbar zu den Bedingungen des Gleichgewichts für ein freies System, weil sich zeigen lässt, dass ein System, das um jede Achse im Gleichgewichte ist, auch im Gleichgewichte seyn muss, wenn es frei wird. Um dieses zu zeigen, seyen A und B zwei Puncte einer Achse, mit deren Hülfe das System im Gleichgewichte ist, so wird die Richtung BC des Drucks auf B nicht mit AB zusammenfallen, weil sonst, der Voraussetzung zuwider, ein einziger Punct A schon hinreichend wäre, das System im Gleichgewichte zu erhalten. Denkt man sich nun durch A eine Achse senkrecht zu der Ebene ABC, so wird der Druck auf B, da dessen Richtung senkrecht zu dieser Achse ist, ohne dieselbe zu schneiden, eine Drehung um diese Achse hervorbringen, sobald der Punct B frei wird. Da man also auf diese Weise für jedes System, das nur mit Hülfe irgend einer Achse im Gleichgewichte ist, eine andere Achse angeben kann, um welche kein Gleichgewicht Statt findet; so muss nothwendig ein System, das um jede Achse im Gleichgewichte ist, auch noch im Gleichgewichte seyn, wenn es frei wird.

6. Um aber die Bedingungen für das Gleichgewicht eines freien Systems aus den Bedingungen des Gleichgewichts eines mit einer Achse verbundenen Systems ableiten zu können, müssen diese durch eine Gleichung zwischen den Intensitäten der Kräfte, den Coordinaten und Winkeln, welche die Angriffspuncte und Richtungen der Kräfte, und die Lage der Achse bestimmen, ausgedrückt werden. Ist diese Gleichung gefunden, so werden diejenigen daraus abzuleitenden

Gleichungen, welche Statt finden müssen, wenn die erstere für jede Lage der Achse befriedigt seyn soll, die gesuchten Gleichungen des Gleichgewichts für ein freies System seyn.

7. Ein System, das sich nur um eine Achse drehen kann, ist im Gleichgewichte, wenn sich die Drehungsbestrebungen sämmtlicher Kräfte, in Beziehung auf diese Achse, gegen einander aufheben. Es muss daher zunächst untersucht werden, wie das Drehungsbestreben einer Kraft von ihrer Grösse, von der Entfernung ihres Angriffspunctes von der Achse, und von ihrer Richtung gegen die Richtung der Achse abhängt.

Der einfachste Fall findet Statt, wenn die Richtung der Kraft senkrecht zu der durch den Angriffspunct und die Achse bestimmten Ebene ist. Der Kürze wegen soll diese Ebene Angriffsebene heissen.

Es sey AB (Fig. 21) die Achse; C der Angriffspunct; CD = x die Entfernung desselben von der Achse und folglich senkrecht zu AB; CP die Richtung der Kraft P, senkrecht zu der Angriffsebene ABC. Wenn man nun DE = 1 annimmt und sich vorstellt, dass in E eine mit P parallele Kraft Q angebracht sey, welche ein eben so grosses Bestreben habe, die Unbiegsame CD um AB zu drehen als die Kraft P; so wird Q eine Function von x und P seyn, vermittelst deren man, sobald sie einmal bekannt ist, das Drehungsbestreben der Kraft P für jeden Werth von x und P auf eine Kraft reduciren kann, welche, in der Entfernung DE = 1 angebracht, dasselhe Drehungsbestreben hat. Um eine ganz klare Vorstellung von der Gleichheit der Drehungsbestrebungen

u ist, so muss es auch die rechte seyn, und man hat daher, weil sich zeigen lässt, dass auch p unabhängig von u ist,

$$\frac{d^2 fx}{dx^2} = o.$$

Integrirt man diese Gleichung, so erhält man

$$fx = Ax + B,$$

und folglich

$$Q = P(Ax + B).$$

Da für $x = o$ auch $Q = o$ seyn muss, so ist $B = o$, und die Gleichung reducirt sich auf

$$Q = PAx.$$

Da ferner für $x = 1$, $Q = P$ seyn muss, so ist $A = 1$, und also

$$Q = Px.$$

10. Was die vorausgesetzte Unabhängigkeit zwischen p und u betrifft, so ist klar, dass p und p′ zusammengenommen einerlei Drehungsbestreben mit P haben, wenn sie mit einer Kraft P′, die der Kraft P gleich und gerade entgegengesetzt ist, im Gleichgewichte sind, und dass also nur gezeigt zu werden braucht, dass in diesem Falle p von u unabhängig ist.

11. Es sey (Fig. 23) $CF = CF' = u$; CP′ senkrecht zu FF′ und parallel mit Fp und F′p′; $p = p'$. Da nun auf der einen Seite der Richtung von P′ alles genau so ist wie auf der andern, so ist klar, dass die drei Kräfte p, p′, P′ in diesem Systeme keine andere Bewegung hervorzubringen streben können, als eine fortschreitende nach der Richtung CP′ oder P′C, und dass der Werth von P′, welcher diese Bewegung verhindert, nur eine Function von u und p

seyn kann. Es lässt sich aber auf dieselbe Art, wie in Nr. 8 zeigen, dass P' für einerlei u der Kraft p proportional ist, und dass man also

$$P' = p\varphi u$$

setzen kann.

12. Um φu zu finden, denkt man sich, (Fig. 24) jede der beiden gleichen Kräfte p, p auf dieselbe Art mit zwei andern gleichen Kräften r, r im Gleichgewichte, wie P' mit p, p im Gleichgewichte seyn soll, nur mit dem Unterschiede, dass der Abstand zwischen den Richtungen von p und r nicht u, sondern v ist; so hat man nach Nr. 11,

$$p = r\varphi v,$$

und die vier Kräfte r, r, r, r, verhindern die Bewegung des Systemes eben so gut als P'. Da nun zwei von den vier Kräften r, r, r, r den gleichen Abstand u + v, und die beiden andern den gleichen Abstand u — v von der Richtung CP' haben, so werden auch die beiden ersten mit einer Kraft

$$R = r\varphi(u+v)$$

und die beiden andern mit einer Kraft

$$R' = r\varphi(u-v),$$

und folglich alle vier zusammen mit einer Kraft R + R' nach der Richtung CP im Gleichgewichte seyn. Diese Kraft R + R' verhindert also die Bewegung des Systems wieder eben so gut, als die beiden Kräfte p, p. Da nun die beiden Kräfte p, p mit P' im Gleichgewichte seyn sollen, so muss es auch R + R' seyn, und man hat also, weil die Richtungen von P' und R + R' einander gerade entgegengesetzt sind,

$$P' = R + R'.$$

Diese Gleichung verwandelt sich aber vermöge der vier vorhergehenden in folgende:

$$\varphi v . \varphi u = \varphi(u+v) + \varphi(u-v),$$

welche entwickelt und mit φu dividirt,

$$\varphi v = 2\left\{1 + \frac{1}{\varphi u} . \frac{d^2\varphi u}{du^2} . \frac{v^2}{1.2} + \frac{1}{\varphi u} . \frac{d^4\varphi u}{du^4} . \frac{v^4}{1.2\,3.4} + ..\right\}$$

gibt. Da die linke Seite dieser Gleichung unabhängig von u ist, so muss es auch die rechte seyn, welches erfordert, dass die Coefficienteu

$$\frac{1}{\varphi u} . \frac{d^2\varphi u}{du^2};\quad \frac{1}{\varphi u} . \frac{d^4\varphi u}{du^4};\ \text{u. s. w.}$$

constante Grössen sind. Setzt man daher

$$\frac{1}{\varphi u} . \frac{d^2\varphi u}{du^2} = a,$$

woraus

$$\frac{d^2\varphi u}{du^2} = a\varphi u$$

folgt, so erhält man durch wiederhohltes Differenziren und substituiren

$$\frac{d^4\varphi u}{du^4} = a\frac{d^2\varphi u}{du^2} = a^2\,\varphi u;$$

$$\frac{d^6\varphi u}{du^6} = a^2\frac{d^2\varphi u}{du^2} = a^3\,\varphi u;\ \text{u. s. w.}$$

folglich

$$\varphi v = 2\left\{1 + \frac{av^2}{1.2} + \frac{a^2v^4}{1.2.3.4} + \frac{a^3v^9}{1.2.3.4\,5.6} + ..\right\}$$

Vergleicht man die eingeschlossene Reihe mit der bekannten

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + ..$$

für $\cos x$, so sieht man leicht, dass sie diese Form annimmt, wenn man $-b^2$ statt a setzt. Man erhält hierdurch

$$\varphi v = 2\left\{1 - \frac{(bv)^2}{1.2} + \frac{(bv)^4}{1.2.3.4} - \frac{(bv)^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\right\}$$

$$= 2\cos(bv);$$

und es ist also auch

$$\varphi u = 2\cos(bu);$$
$$P' = 2p\cos(bu).$$

13. Um die Constante b zu bestimmen, setze man

$$u = \frac{\frac{1}{2}\pi}{b},$$

so erhält man das offenbar unrichtige Resultat

$$P' = 2p\cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

welches nicht anders vermieden werden kann, als wenn man $b = 0$ setzt. Hierdurch reducirt sich die Gleichung

$$P' = 2p\cos(bu)$$

auf

$$P' = 2p,$$

woraus man sieht, dass p unabhängig von u ist, und zugleich, in welcher Beziehung P′ mit den gleichen, parallelen Kräften p, p steht, wenn Gleichgewicht Statt findet.

14. Da die Gleichung $Q = Px$, (Nr. 9,) nur in der Voraussetzung gefunden worden ist, dass sich die Angriffspuncte von P und Q in einer Senkrechten zur Axe befinden, so ist noch zu zeigen, dass sie für jede Lage dieser Angriffspuncte gilt. Hierzu muss aber vorher gezeigt werden, dass das Drehungsbestreben zweier gleichen Kräfte, deren Angriffspuncte gleich weit von der Achse abstehen, gleich ist, erstens, wenn diese Angriffspuncte mit der Achse

in einer Ebene liegen, und zweitens, wenn sie in einer Ebene liegen, die zu der Achse senkrecht ist.

15. Für den ersten Fall sey AB (Fig. 25) die Axe; CD senkrecht zu AB; C′C″ in der Ebene ABC und ebenfalls senkrecht zu AB; CD = C′D′ = C″D′. Es seyen C, C′, C″ die Angriffspuncte der gleichen Kräfte P, P′, P″; CP, C′P′, C″P″ die Richtungen derselben, senkrecht zu der Ebene ABC; D′ und F die Angriffspuncte der gleichen Kräfte R = 2P und R′ = 2P; D′R, FR′ ihre Richtungen, ebenfalls senkrecht zu der Ebene ABC.

Da nun C′C″ und CC″ in D′ und F von AB halbirt werden, so würde nach Nr. 13, wofern P nicht da wäre, R mit P′ und P″, und wenn P′ nicht da wäre, R′ mit P″ und P im Gleichgewichte seyn. Da aber die Angriffspuncte von R und R′ in AB liegen, so würden diese Kräfte eine Drehung um AB nicht verhindern können, wenn nicht das Drehungsbestreben von P″, im ersten Falle dem von P′, und im zweiten dem von P gleich und entgegengesetzt wäre. Da nun in beiden Fällen das Drehungsbestreben von P″ dasselbe ist, so müssen die von P′ und P gleich seyn.

16. Für den zweiten Fall sey CDC′ (Fig 26) die Ebene, welche die Achse in D senkrecht schneidet, und in welcher sich die gleich weit von D abstehenden Angriffspuncte C, C′ der gleichen Kräfte P, P′, P″ befinden. In dieser Ebene liegen auch die zu CD und C′D senkrechten Richtungen CP, C′P′, C′P″ dieser Kräfte.

Denkt man sich jetzt durch die Achse eine Ebene gelegt, welche den Winkel CDC′ halbirt, so ist in

Beziehung auf die Achse und die Kräfte P, P'', auf der einen Seite dieser Ebene alles genau so wie auf der andern, und es ist folglich kein Grund vorhanden, warum das Drehungsbestreben von P'' dem von P nicht gleich, und was sich von selbst versteht, entgegengesetzt seyn sollte. Da nun auch wegen der gerade entgegengesetzten Richtung und gleichen Grösse der Kräfte P'', P' das Drehungsbestreben von P'' dem von P' gleich und entgegengesezt ist, so muss das von P' mit dem von P einerlei seyn.

17. Wenn nun, Fig. 27, der Angriffspunct C einer Kraft P eine beliebige Lage gegen den Angriffspunct E der Kraft Q und die Achse AB hat, so kann man sich ausser der Ebene ABE noch eine andere CD'C' denken, welche durch C geht, und zu AB senkrecht ist. Alsdann hat, nach Nr. 16, wenn D'C' die Durchschnittslinie beider Ebenen, und $C'D = CD'$ ist, eine in C' angebrachte Kraft $P' = P$ noch einerlei Drehungsbestreben mit P. Ferner hat, nach Nr. 15, wenn C''D senkrecht zu AB, und $C''D = C'D'$ ist, eine in C'' angebrachte Kraft $P'' = P'$ einerlei Drehungsbestreben mit P' und folglich auch mit P. Da nun die Angriffspuncte von Q und P'' in einer zu AB senkrechten Geraden liegen, so hat man nach Nr. 9, wenn Q die Kraft bezeichnet, welche, in der Entfernung $DE = 1$ angebracht, mit P'' und folglich auch mit P einerlei Drehungsbestreben um AB hat,

$$Q = P''.C''D = P.CD'.$$

Die Nr. 9 gefundene Gleichung

$$Q = Px$$

gilt demnach für alle Fälle, in welchen die Richtungen der Kräfte senkrecht zu ihren Angriffsebenen sind.

18. Für den Fall, dass die Richtung der Kraft P nicht senkrecht zu ihrer Angriffsebene ist, sey C, (Fig. 28) ihr Angriffspunct; CR′ die Projection ihrer Richtung CP auf der Angriffsebene; PCR′ = ϑ der Winkel, welchen ihre Richtung mit der Angriffsebene macht, und CR senkrecht zu dieser Ebene. Es ist klar, dass zwei Kräfte R und R′, welche in C nach den Richtungen CR und CR′ angebracht sind, und durch ihr Zusammenwirken den Punct C eben so stark nach der Richtung CP zu bewegen streben, als die Kraft P, die Kraft P ersetzen können. Da aber die Richtung von R′ in der Angriffsebene liegt, so ist das Drehungsbestreben dieser Kraft null, und die Kraft R ist es also, welche hinsichtlich des Drehungsbestrebens die Kraft P ersetzt.

Die Aufgabe, R und R′ so zu bestimmen, dass sie die Kraft P ersetzen, reducirt sich darauf, sie so zu bestimmen, dass sie mit einer Kraft P′, die der P gleich, und gerade entgegengesetzt ist, im Gleichgewichte sind. Um hierzu zu gelangen, kann man auf diesen besondern Fall das Verfahren anwenden, welches in Nr. 5 und 6 für den allgemeinen Fall angedeutet worden ist.

19. Da die Kräfte P′, R, R′, weil ihre Richtungen in der Ebene RCR′ liegen, den Punct C nur in dieser Ebene zu bewegen streben, so folgt aus ähnlichen Betrachtungen wie in Nr. 5, dass die Kräfte P′, R, R′ im Gleichgewichte sind, wenn der Punct C um jede zu der Ebene RCR′ senkrechte Achse im Gleichgewichte ist. Es sey M, (Fig. 28) der Durchschnittspunct einer solchen Achse mit der Ebene RCR′. Um nun mit Hülfe der in Nr. 9 gefundenen

Gleichung $Q = Px$ die Drehungsbestrebungen der Kräfte P', R, R' in Beziehung auf diese Achse ausdrücken zu können, müssten ihre Richtungen senkrecht zu ihren Angriffsebenen seyn, welches aber nicht der Fall ist. Allein dieses Hinderniss lässt sich mit Hülfe des Grundsatzes beseitigen, dass man den Angriffspunct einer Kraft in jeden Punct ihrer Richtung verlegen kann, ohne dadurch an ihrer Wirkung etwas zu ändern, vorausgesetzt, dass der neue Angriffspunct mit dem alten fest verbunden ist. Wenn man daher von dem Puncte M auf die Richtungen der drei Kräfte die Senkrechten MD, ME, MF fället, und statt des gemeinschaftlichen Angriffspunctes C die mit diesem fest verbundenen Puncte D, E, F dieser Senkrechten als die Angriffspuncte betrachtet, so ist die Richtung jeder Kraft senkrecht zu ihrer neuen Angriffsebene, ohne dass sich ihr Drehungsbestreben geändert hat. Setzt man nun $CD = x$; $CE = y$; $MF = z$; so sind nach Nr. 9, die auf die Entfernung 1 reducirten Drehungsbestrebungen

$$Rx;\; R'y;\; P'z.$$

Nun ist aber vermöge der angenommenen Lage von M das Drehungsbestreben von R' denen von R und P' entgegengesetzt; man hat also für den Fall, dass sich die Drehungsbestrebungen gegen einander aufheben,

$$Rx + P'z - R'y = 0;$$

oder wenn man z durch x, y und Θ ausdrückt

$$Rx + P'(y\cos\Theta - x\sin\Theta) - R'y = 0;$$

oder nach x und y geordnet,

$$(R - P'\sin\Theta)\,x - (R' - P'\cos\Theta)\,y = 0.$$

Sobald nun diese Gleichung befriedigt ist, findet mit Hülfe der durch die Coordinaten x, y bestimmten Achse Gleichgewicht Statt. Wenn aber für jede Achse Gleichgewicht Statt finden, also die Gleichung für jeden Werth von x und y befriedigt seyn soll, so müssen die Coefficienten dieser Grössen Null seyn, woraus

$$R = P' \sin \Theta, \quad R' = P' \cos \Theta$$

folgt. Es ist also, wenn die Richtung einer Kraft P mit ihrer Angriffsebene den Winkel Θ macht, und r die Entfernung ihres Angriffspunctes von der Achse ist,

$$Q = P r \sin \Theta,$$

das auf die Entfernung 1 von der Achse reducirte Drehungsbestreben der Kraft P. Dieses auf die Entfernung 1 reducirte Drehungsbestreben einer Kraft nennt man ihr statisches Moment.

20. Mit Hülfe des zuletzt gefundenen Resultates ist man im Stande für eine gegebene Achse die Drehungsbestrebungen sämmtlicher, an einem Systeme angebrachten Kräfte auf eine einzige Kraft zu reduciren, welche, wenn sie in der Entfernung 1, senkrecht zu ihrer Angriffsebene angebracht werden soll, der Summe der statischen Momente gleich ist. Hieraus ist klar, dass, wenn das System mit Hülfe der gegebenen Achse im Gleichgewichte seyn soll, die Summe der statischen Momente Null seyn muss, und dass also, wenn r', r'', r''', .. die Entfernungen der Angriffspuncte der Kräfte P', P'', P''', .. von der Achse, und Θ', Θ'', Θ''' .. die Winkel bezeichnen, welche ihre Richtungen mit ihren Angriffsebenen machen, die Gleichung

$$P'r'\sin\Theta' + P''r''\sin\Theta'' + \ldots = 0,$$

die Bedingung des Gleichgewichtes um die gegebene Achse ausdrückt.

21. Um diese Gleichung zu dem vorliegenden Zwecke brauchbar zn machen, müssen die Producte $r'\sin\Theta'$, $r''\sin\Theta''$, .. mit Hülfe der analytischen Geometrie durch solche Grössen ausgedrückt werden, durch welche man die Lage der Achse, die Angriffspuncte und Richtungen der Kräfte auf eine allgemeine Art angeben kann.

Es seyen

$$x = az + \alpha$$
$$y = bz + \beta$$

die Gleichungen der Achse; x', y', z' die Coordinaten des Angriffspunctes der Kraft P'; so ist (Littrow's anal. Geom. S. 66)

$$= \sqrt{\frac{(x'-az'-\alpha)^2+(y'-bz'-\beta)^2+[b(x'-\alpha)-a(y'-\beta)]^2}{a^2+b^2+1}}$$

Es seyen

$$x = \alpha' z + \alpha'$$
$$y = b' z + \beta'$$

die Gleichungen der Richtung der Kraft P', und

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

sey die Gleichung der Angriffsebene; so ist (Littrow S. 47)

$$\sin\Theta' = \frac{Aa' + Bb' + C}{\sqrt{(\alpha'^2+b'^2+1)}\cdot\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}.$$

Da nun die Gleichung der Angriffsebene auch

$$(x-x')(y'-bz'-\beta)-(y-y')(x'-az'-\alpha)$$
$$+(z-z')[b(x'-\alpha)-a(y'-\beta)] = 0$$

ist, (Littrow, S. 64), so hat man

$$A = y' - bz' - \beta;$$
$$B = -(x' - az' - \alpha);$$
$$C = b(x' - \alpha) - a(y' - \beta);$$
$$\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)}$$
$$= \sqrt{\{(x'-az'-\alpha)^2 + (y'-bz'-\beta)^2 + [b(x'-\alpha) - a(y'-\beta)]^2\}},$$

und folglich

$$r'\sin\theta' = \frac{a'(y'-bz'-\beta) - b'(x'-az'-\alpha) + b(x'-\alpha) - a(y'-\beta)}{\sqrt{(a'^2+b'^2+1)} \cdot \sqrt{(a^2+b^2+1)}}$$

22. Um jetzt statt der Grössen a, a′,... die Winkel einzuführen, welche die Achse und die Richtungen der Kräfte mit den Coördinaten machen, seyen l, m, n die Coordinaten eines in der Achse liegenden Punctes; λ, μ, ν die Winkel, welche die Achse, und α', β', γ' die Winkel, welche die Richtung der Kraft P′ mit den Achsen der x, y, z macht. Die Gleichungen der Achse sind alsdann (Littrow S. 34)

$$x - l = \frac{\cos\lambda}{\cos\nu}(z - n),$$
$$y - m = \frac{\cos\mu}{\cos\nu}(z - n),$$

und die Gleichungen der Richtung der Kraft P′

$$x - x' = \frac{\cos\alpha'}{\cos\gamma'}(z - z'),$$
$$y - y' = \frac{\cos\beta'}{\cos\gamma'}(z - z').$$

Aus der Zusammenstellung dieser Gleichungen mit den in Nr. 21 gebrauchten ergibt sich

$$a = \frac{\cos\lambda}{\cos\nu}; \qquad \alpha = l - n\frac{\cos\lambda}{\cos\nu};$$
$$b = \frac{\cos\mu}{\cos\nu}; \qquad \beta = m - n\frac{\cos\mu}{\cos\nu};$$
$$a' = \frac{\cos\alpha'}{\cos\gamma'}; \qquad b' = \frac{\cos\beta'}{\cos\gamma'}.$$

Es ist also

$$a'(y'-bz'-\beta)=\frac{\cos\alpha'}{\cos\gamma'}\left\{y'-z'\frac{\cos\mu}{\cos\nu}-\left(m-n\frac{\cos\mu}{\cos\nu}\right)\right\};$$

$$b'(x'-az'-\alpha)=\frac{\cos\beta'}{\cos\gamma'}\left\{x'-z'\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}-\left(l-n\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}\right)\right\};$$

$$b(x'-\alpha)=\frac{\cos\mu}{\cos\nu}\left\{x'-\left(l-n\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}\right)\right\};$$

$$a(y'-\beta)=\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}\left\{y'-\left(m-n\frac{\cos\mu}{\cos\nu}\right)\right\};$$

$$b(x'-\alpha)-a(y'-\beta)=\frac{\cos\mu}{\cos\nu}x'-\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}y'-\left(\frac{\cos\mu}{\cos\nu}l-\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}m\right);$$

$$a^2+b^2+1=\frac{\cos^2\alpha'}{\cos^2\gamma'}+\frac{\cos^2\beta'}{\cos^2\gamma'}+1=\frac{1}{\cos^2\gamma};$$

$$a^2+b^2+1=\frac{\cos^2\lambda}{\cos^2}+\frac{\cos^2\mu}{\cos^2\nu}+1=\frac{1}{\cos^2\nu};$$

$$\sqrt{(a'^2+b'^2+1)}\cdot\sqrt{(a^2+b^2+1)}=\frac{1}{\cos\gamma'\cos\nu};$$

folglich hat man

$$\begin{aligned}r'\sin\Theta' &= \cos\nu\cos\alpha'\left\{y'-z'\frac{\cos\mu}{\cos\nu}-\left(m-n\frac{\cos\mu}{\cos\nu}\right)\right\}\\ &\quad-\cos\nu\cos\beta'\left\{x'-z'\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}-\left(l-n\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}\right)\right\}\\ &\quad+\cos\mu\cos\gamma'(x'-l)-\cos\lambda\cos\gamma'(y'-m);\end{aligned}$$

oder auf folgende Art geordnet,

$$\begin{aligned}r'\sin\Theta' &= \cos\alpha'(n\cos\mu-m\cos\nu)\\ &\quad+\cos\beta'(l\cos\nu-n\cos\lambda)\\ &\quad+\cos\gamma'(m\cos\lambda-l\cos\mu)\\ &\quad+(z'\cos\beta'-y'\cos\gamma')\cos\lambda\\ &\quad+(x'\cos\gamma'-z'\cos\alpha')\cos\mu\\ &\quad+(y'\cos\alpha'-x'\cos\beta')\cos\nu.\end{aligned}$$

23. Da nun ganz ähnliche Ausdrücke für $r''\sin\Theta''$;

$r'''\sin\theta'''$; .... Statt finden, so verwandelt sich die in Nr. 20 aufgestellte Gleichung in folgende:

$$(P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + ..)(n\cos\alpha - m\cos\nu)$$
$$+ (P'\cos\beta' + P'\cos\beta'' + ..)(l\cos\nu - n\cos\lambda)$$
$$+ (P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + ..)(m\cos\lambda - l\cos\mu)$$
$$+ [P'(z'\cos\beta' - y'\cos\gamma') + P''(z''\cos\beta'' - y''\cos\gamma'') + ..]\cos\lambda$$
$$+ [P'(x'\cos\gamma' - z'\cos\alpha') + P''(x''\cos\gamma'' - z''\cos\alpha'') + ..]\cos\mu$$
$$+ [P'(y'\cos\alpha' - x'\cos\beta') + P''(y''\cos\alpha'' - x''\cos\beta'') + ..]\cos\nu = 0.$$

24. Diese Gleichung muss also befriedigt seyn, wenn Gleichgewicht um die durch die Grössen l, m, n, λ, μ, ν bestimmte Achse Statt finden soll. Sollte das System um jede Achse im Gleichgewichte seyn, so müsste auch dieser Gleichung durch jeden Werth von l, m, n, λ, μ, ν Genüge geschehen. Da dieses nun nicht anders möglich ist, als wenn die Coefficienten der aus diesen Grössen zusammengesetzten Ausdrücke einzeln null sind, so hat man folgende sechs Gleichungen für das Gleichgewicht eines freien Systems:

$$P'\cos\alpha' + P''\cos\beta'' + .. = 0;$$
$$P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + .. = 0;$$
$$P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + .. = 0:$$
$$P'(z'\cos\beta - y'\cos\gamma') + P''(z''\cos\beta'' - y''\cos\gamma'') + .. = 0;$$
$$P'(x'\cos\gamma' - z'\cos\alpha') + P''(x''\cos\gamma'' - z''\cos\alpha'') + .. = 0;$$
$$P'(y'\cos\alpha' - x'\cos\beta') + P''(y''\cos\alpha'' - x''\cos\beta'') + .. = 0.$$

Discussion der Gleichungen in Nr. 23 und 24.

25. Der Bequemlichkeit wegen soll von jetzt an

$$P'\cos\alpha' + P''\cos\alpha'' + .. = X;$$
$$P'\cos\beta' + P''\cos\beta'' + .. = Y;$$
$$P'\cos\gamma' + P''\cos\gamma'' + .. = Z;$$
$$P'(z'\cos\beta' - y'\cos\gamma') + .. = L;$$

$$P'(x'\cos'\alpha - z'\cos\alpha') + \ldots = M;$$
$$P'(y'\cos\alpha' - x'\cos\beta') + \ldots = N;$$

gesetzt werden, wodurch sich die Gleichung in Nr. 23 in folgende verwandelt:

$$\begin{aligned} & X(n\cos\mu - m\cos\nu) \\ + & Y(l\cos\nu - n\cos\lambda) \\ + & Z(m\cos\lambda - l\cos\mu) \\ + & L\cos\lambda \\ + & M\cos\mu \\ + & N\cos\nu = o \quad \ldots \ldots \quad (A) \end{aligned}$$

26. Setzt man in dieser Gleichung $l = o$, $m = o$, $n = o$, so erhält man

$$L\cos\lambda + M\cos\mu + N\cos\nu = o$$

als Bedingung, dass keine Drehung um die durch den Ursprung der Coordinaten gehende Achse entsteht, welche mit den Coordinaten die Winkel λ, μ, ν macht. Wenn also um keine durch den Ursprung der Coordinaten gehende Achse eine Drehung Statt finden soll, so muss zugleich

$$L = o;\ M = o;\ N = o$$

seyn. Die Gleichung reducirt sich aber auf $L = o$, oder auf $M = o$, oder auf $N = o$, je nachdem man $\lambda = o$, oder $\mu = o$, oder $\nu = o$ setzt und dadurch die Achse der x, oder die Achse der y, oder die Achse der z zur Achse macht. $L = o$ ist also die Bedingung, dass keine Drehung um die Achse der x; $M = o$, dass keine Drehung um die Achse der y, und $N = o$, dass keine Drehung um die Achse der z entsteht. Die Bedingung, dass um keine Achse, die durch den Ursprung der Coordinaten geht, eine Drehung soll entstehen können, ist also erfüllt, wenn

um keine der drei zu einander senkrechten coordinirten Achsen eine Drehung entstehen kann.

27. Um zu sehen was aus der Gleichung (A) wird, wenn man die Achse so weit entfernt, dass eine drehende Bewegung um dieselbe als eine fortschreitende angesehen werden kann, setze man kl, km, kn statt l, m, n, und dividire die Gleichung durch k, so erhält man

$$\begin{aligned} & X(n\cos\mu - m\cos\nu) \\ + & Y(l\cos\nu - n\cos\lambda) \\ + & Z(m\cos\lambda - l\cos\mu) \\ + & L\frac{\cos\lambda}{k} + M\frac{\cos\mu}{k} + N\frac{\cos\nu}{k} = 0, \end{aligned}$$

eine Gleichung, welche für jeden Werth von k, l, m, n Statt finden muss, wenn um die durch kl, km, kn, λ, μ, ν bestimmte Achse keine Drehung entstehen soll.

Macht man nun k unendlich gross, so verschwinden die drei letzten Glieder, und man erhält

$$\begin{aligned} & X(n\cos\mu - m\cos\nu) \\ + & Y(l\cos\nu - n\cos\lambda) \\ + & Z(m\cos\lambda - l\cos\mu) = 0 \end{aligned}$$

als Bedingung, dass keine Drehung um die unendlich weit entfernte, durch kl, km, kn, λ, μ, ν bestimmte Achse entstehen kann. Wenn also um keine unendlich weit entfernte Achse eine Drehung, das heisst, wenn nach keiner Richtung eine fortschreitende Bewegung entstehen soll, so muss zugleich

$$X = 0;\ Y = 0;\ Z = 0$$

seyn. Die Gleichung reducirt sich aber auf $X = 0$, oder auf $Y = 0$, oder auf $Z = 0$, je nachdem man $l = 0$, $\lambda = \frac{\pi}{2}$, oder $m = 0$, $\mu = \frac{\pi}{2}$, oder $n = 0$,

$\nu = \frac{\pi}{2}$ setzt und dadurch die unendlich weit entfernte Achse in die Ebene der yz, oder in die Ebene der xz, oder in die Ebene der xy legt. $X = o$ ist also die Bedingung, dass keine Bewegung parallel mit der Achse der x, $Y = o$, dass keine Bewegung parallel mit der Achse der y, und $Z = o$, dass keine Bewegung parallel mit der Achse der z entsteht. Die Bedingung, dass nach keiner Richtung eine fortschreitende Bewegung soll entstehen können, ist also erfüllt, wenn keine mit einer der drei zu einander senkrechten coordinirten Achsen parallele Bewegung entstehen kann.

28. Um die Bedeutung der sechs Gleichungen in Nr. 24 noch auf eine andere Art ausdrücken zu können, ist es nöthig zu wissen, was die Producte $P\cos\alpha$, $P\cos\beta$, $P\cos\gamma$ vorstellen, welche von jeder Kraft auf die nämliche Art in allen diesen Gleichungen vorkommen. Man gelangt hierzu durch Anwendung dieser Gleichungen auf folgenden besondern Fall:

Es seyen P', P'', P''' drei zu einander senkrechte mit den Coordinaten parallele Kräfte, welche in einem gemeinschaftlichen Angriffspuncte mit einer vierten Kraft R im Gleichgewichte sind, so hat man

$$\alpha' = o;\ \beta' = \frac{\pi}{2};\ \gamma' = \frac{\pi}{2};$$

$$\alpha'' = \frac{\pi}{2};\ \beta'' = o;\ \gamma'' = \frac{\pi}{2};$$

$$\alpha''' = \frac{\pi}{2};\ \beta''' = \frac{\pi}{2};\ \gamma''' = o;$$

und folglich

$$\cos\alpha' = 1;\ \cos\beta' = 0;\ \cos\gamma' = 0;$$
$$\cos\alpha'' = 0;\ \cos\beta'' = 1;\ \cos\gamma'' = 0;$$
$$\cos\alpha''' = 0;\ \cos\beta''' = 0;\ \cos\gamma''' = 1.$$

Wenn nun die vierte Kraft R die Winkel a, b, c mit den Coordinaten macht, so geben die drei ersten der sechs Gleichungen in Nr. 24,

$$P' + R\cos a = 0;$$
$$P'' + R\cos b = 0;$$
$$P''' + R\cos c = 0,$$

und die drei übrigen fallen weg, weil sie von selbst befriedigt werden, sobald diese befriedigt sind, oder auch dadurch, dass man den gemeinschaftlichen Angriffspunct zum Ursprunge der Coordinaten wählt. Man hat also

$$P' = -R\cos a;$$
$$P'' = -R\cos b;$$
$$P''' = -R\cos c.$$

Da nun die Kraft R mit einer gleichen und gerade entgegengesetzten Kraft P ebenfalls im Gleichgewichte ist, so muss es in Beziehung auf das Gleichgewicht des gemeinschaftlichen Angriffspunctes einerlei seyn, ob die Kraft P oder die drei Kräfte P′, P″, P‴ angebracht sind. Es ist aber, wenn α, β, γ die Winkel bezeichnen, welche die Richtung von P mit den Coordinaten macht,

$$a = \pi - \alpha;\ b = \pi - \beta;\ c = \pi - \gamma;$$

und folglich

$$\cos a = -\cos\alpha;\ \cos b = -\cos\beta;\ \cos c = -\cos\gamma.$$

Hierdurch, und weil R = P ist, erhält man

$$P' = P\cos\alpha;\ P'' = P\cos\beta;\ P''' = P\cos\gamma,$$

woraus man sieht, dass die Producte $P \cos \alpha$, $P \cos \beta$, $P \cos \gamma$, drei mit den zu einander senkrechten Achsen der Coordination parallele Kräfte vorstellen, welche in dem Angriffspuncte von P angebracht, diese Kraft ersetzen.

29. Eine Kraft P durch einige andere P', P'', .. ersetzen, heisst die Kraft P in diese zerlegen, und einige Kräfte P', P'', .. durch eine einzige P ersetzen, heisst die Kräfte P', P'', zusammensetzen. In dieser Beziehung nennt man auch die Kraft P die Resultante, und die Kräfte P', P'', .. die Composanten.

Denkt man sich demnach jede Kraft parallel mit den Achsen der Coordinaten zerlegt, und bezeichnet die Composanten von P' mit X', Y', Z'; die von P'' mit X'', Y'', Z'' u. s. w., so kann man die sechs Gleichungen Nr. 24 auf folgende Art schreiben:

$$
\left.\begin{array}{l}
X' + X'' + \ldots = 0; \\
Y' + Y'' + \ldots = 0; \\
Z' + Z'' + \ldots = 0; \\
Y'z' - Z'y' + Y''z'' - Z''y'' + \ldots = 0; \\
Z'x' - X'z' + Z''x'' - X''z'' + \ldots = 0; \\
X'y' - Y'x' + X''y'' - Y''x'' + \ldots = 0,
\end{array}\right\} \quad (B)
$$

wo dann die drei ersten ausdrücken, dass für jede der drei coordinirten Achsen die Summe der mit ihr parallelen Composanten null seyn muss.

30. Um die drei letzten Gleichungen zu erklären, sey E, (Fig. 29) der Angriffspunct der Kraft P'; EX', EY', EZ' seyen die mit den coordinirten Achsen AB, AC, AD parallelen Richtungen der Composanten X', Y', Z' von P'; F, G, H seyen die Puncte, in welchen diese Richtungen verlängert, den coordinirten Ebenen begegnen; I, K, L die Fusspuncte der von F, G, H

auf die coordinirten Achsen gefällten Senkrechten. Wählt man jetzt statt des gemeinschaftlichen Angriffspunctes E der Composanten, die in ihren Richtungen liegenden Puncte F, G, H zu ihren Angriffspuncten, so sieht man, dass

$$Y'z' = Y'.GI,$$
$$Z'y' = Z'.HI$$

die statischen Momente der Composanten Y', Z' in Beziehung auf die Achse der x sind, und dass diese Momente entgegengesetzte Zeichen haben müssen. Es ist also, weil X' mit der Achse der x parallel wirkt, und folglich kein Drehungsbestreben um dieselbe hat,

$$Y'x' - Z'y'$$

die Summe der von den Composanten von P' herrührenden statischen Momente in Beziehung auf die Achse der x. Eben so ist, wie man leicht aus der Figur entnehmen kann, $Z'x' - X'z'$ die Summe der statischen Momente dieser Composanten in Beziehung auf die Achse der y, und $X'y' - Y'x'$ in Beziehung auf die Achse der z. Die drei letzten der sechs Gleichungen (B) drücken also aus, dass für jede der drei coordinirten Achsen die Summe der statischen Momente aller Composanten null seyn muss.

II. Analytische Uebungen. *)

a). Bestimmung des zum Zeiger n gehörenden Gliedes einer Reihe

$$u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, \ldots u_n, \ldots$$

durch das erste Glied u_0 derselben, durch die Anfangsglieder

$$\Delta u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0, \ldots \Delta^{r-1} u_0$$

ihrer $r - 1$ ersten Differenzreihen, und durch die $n - r + 1$ ersten Glieder

$$\Delta^r u_0, \Delta^r u_1, \Delta^r u_2, \Delta^r u_3, \ldots \Delta^r u_{n-r}$$

ihrer rten Differenzreihe, vorausgesetzt, dass $n > r$ ist.

Bekanntlich ist

$$(1) \quad u_n = u_0 + \binom{n}{1} \Delta u_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 u_0 + \binom{n}{3} \Delta^3 u_0 + \ldots + \binom{n}{r-1} \Delta^{r-1} u_0 + \binom{n}{r} \Delta^r u_0 + \binom{n}{r+1} \Delta^{r+1} u_0 + \binom{n}{r+2} \Delta^{r+2} u_0 + \ldots + \Delta^n u_0$$

wenn man durch $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$, etc. ... die Bi-

---

*) Unter dieser Ueberschrift werde ich in gegenwärtiger Zeitschrift einen fortlaufenden, theils Anfängern im Studium der höheren Mathematik, theils denjenigen, welche sich mit dem Unterrichte in dieser Wissenschaft beschäftigen, gewidmeten Artikel unterhalten, in welchem ich Verbesserungen, Erweiterungen, Veränderungen analytischer Entwickelungen, zumal solche, die bereits an unserer Lehranstalt einheimisch geworden sind, oder doch zu abgesonderten Aufsätzen nicht Stoff genug darbieten, bekannt zu machen gedenke.

v. Ettingshausen.

nomialcoefficienten für den Exponenten n, nämlich

$$n, \frac{n(n-1)}{1.2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}, \text{etc.}$$

vorstellt. Ferner ist

$$\Delta^m u_0 = u_m - \binom{m}{1} u_{m-1} + \binom{m}{2} u_{m-2} - \ldots \ldots + (-1)^m u_0$$

also auch, in so fern man die rte Differenzreihe selbst wieder als Hauptreihe betrachtet:

$$(2) \quad \Delta^{r+m} u_0 = \Delta^r u_m - \binom{m}{1} \Delta^r u_{m-1} + \binom{m}{2} \Delta^r u_{m-2} - \ldots + (-1)^m \Delta^r u_0$$

Setzt man hier nach und nach $m = 1, 2, 3 \ldots n - r$, so ergibt sich

$$\Delta^{r+1} u_0 = \Delta^r u_1 - \Delta^r u_0$$

$$\Delta^{r+2} u_0 = \Delta^r u_2 - \binom{2}{1} \Delta^r u_1 + \Delta^r u_0$$

$$\Delta^{r+3} u^0 = \Delta^r u_3 - \binom{3}{1} \Delta^r u_2 + \binom{3}{2} \Delta^r u_1 - \Delta^r u_0$$

. . . .

$$\Delta^n u_0 = \Delta^r u_{n-r} - \binom{n-r}{1} \Delta^r u_{n-r-1} + \binom{n-r}{2} \Delta^r u_{n-r-2} - \ldots + (-1)^{n-r} \Delta^r u^0.$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die Formel (1), so wird, wenn man alles nach den Differenzen der Glieder der Hauptreihe ordnet:

$$(3) \; u_n = u_0 + \binom{n}{1} \Delta u_0 + \binom{n}{2} \Delta^2 u_0 + \binom{n}{3} \Delta^3 u_0 + \ldots + \binom{n}{r-1} \Delta^{r-1} u$$
$$+ \left[\binom{n}{r} - \binom{n}{r+1} + \binom{n}{r+2} - \binom{n}{r+3} + \ldots + (-1)^{n-r} \right] \Delta^r u_0$$

$$+\left[\binom{n}{r+1}-\binom{2}{1}\binom{n}{r+2}+\binom{3}{2}\binom{n}{r+3}\right.$$
$$\left.-\ldots+(-1)^{n-r-1}\binom{n-r}{n-r-1}\right]\Delta^r u_1$$
$$+\left[\binom{n}{r+2}-\binom{3}{1}\binom{n}{r+3}+\binom{4}{2}\binom{n}{r+4}\right.$$
$$\left.-\ldots+(-1)^{n-r-2}\binom{n-r}{n-r-1}\right]\Delta^r u_2$$
$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\left[\binom{n}{n-1}-\binom{n-r}{1}\right]\Delta^r u_{n-r-1}$$
$$\Delta^r u_{n-r}$$

Das in diesem Ausdrucke herrschende Gesetz ist leicht zu übersehen. Der Coefficient von $\Delta^r u_w$ ist

$$(4)\quad \binom{n}{r+w}-\binom{w+1}{1}\binom{n}{r+w+1}\binom{w+2}{2}\binom{n}{r+w+2}$$
$$+\ldots+(1)^{n-r-w}\binom{n-r}{n-r-w}$$

Dieses Polynom lässt sich auf mehrere Arten in einen einfachen Ausdruck verwandeln. So z. B. ist es nicht schwer sich zu überzeugen, dass dasselbe den Coefficienten von x^{r+w} in der nach dem binomischen Lehrsatze vollzogenen Entwickelung des Productes

$$(1+x)^n\,.\,(1+x)^{-(w+1)}$$

darstellt. Da nun dieses Product auch

$$=(1+x)^{n-w-1}$$

ist, so erhält man für das Polynom (4) auch den Ausdruck

$$\binom{n-w-1}{r-1}.$$

Auf directem Wege gelangt man zur Summe des Ausdruckes (4), wenn man die Binomial-Coefficienten ihren Fundamental-Eigenschaften gemäss transformirt.

Viele Reductionen dieser Gattung findet man in der Schrift: „Die combinatorische Analysis etc." Wien 1826.

Wir wollen uns indessen zur Erreichung dieses Zweckes einer merkwürdigen von Gauss in den Comment. soc. reg. scient. Gottingensis recent. Vol. II. „Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc." vorgetragenen Formel bedienen.

Bezeichnet man nämlich die Gränze, welcher sich das Product

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n \cdot n^z}{(z+1)(z+2)(z+3)\ldots(z+n)}$$

bei dem unendlichen Wachsen der ganzen positiven Zahl n für jeden Werth von z (ganze negative Zahlen ausgenommen) unendlich nähert, durch

$$\Pi\,(z),$$

so ist die Summe der unendlichen Reihe

$$(5)\quad 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdot \beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} + \text{etc.}$$

vorausgesetzt, dass diese Reihe convergirt, was nur dann Statt findet, wenn $\alpha + \beta - \gamma$ negativ ausfällt,

$$(6)\quad = \frac{\Pi(\gamma-1) \cdot \Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1) \cdot \Pi(\gamma-\beta-1)}$$

Das Polynom (4) kann, wenn man die Bedeutung der Binomial-Coefficienten gehörig berücksichtiget, auf die Form

$$\binom{n}{r+w}\left[1 - \frac{(w+1)(n-r-w)}{1 \cdot (r+w+1)} + \frac{(w+1)(w+2) \cdot (n-r-w)(n-r-w-1)}{1 \cdot 2\,(r+w+1)(r+w+2)} - \text{etc.}\right]$$

gebracht werden. Der Ausdruck innerhalb der Klam-

mern stimmt mit (5) überein, wenn man $\alpha = w + 1$, $\beta = -n + r + w$, $\gamma = r + w + 1$ annimmt, und ist, der Formel (6) gemäss

$$(7) \qquad = \frac{\Pi(r + w) \cdot \Pi(n - w - 1)}{\Pi(r - 1) \cdot \Pi(n)}$$

Aber $\Pi(z)$ ist offenbar auch die Grenze, an welche die Grösse

$$\frac{1}{z + 1} \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n \cdot n^{r+1}}{(z + 2)(z + 3)(z + 4) \ldots (z + n + 1)}$$

bei dem unendlichen Wachsen von n gebunden ist, daher besteht die Gleichung

$$\Pi(z) = \frac{1}{z+1} \cdot \Pi(z + 1)$$

oder $$\frac{\Pi(z+1)}{\Pi(z)} = z + 1$$

aus welcher, wenn g eine ganze positive Zahl bedeutet, sogleich

$$(8) \quad \frac{\Pi(z + g)}{\Pi(z)} = (z + 1)(z + 2) \ldots (z + g)$$

erhalten wird. Die Formel (8) auf das Resultat (7) angewendet, gibt

$$\frac{\Pi(r + w)}{\Pi(r - 1)} = r(r + 1)(r + 2) \ldots (r + w)$$

$$\frac{\Pi(n)}{\Pi(n - w - 1)} = (n - w)(n - w + 1) \ldots (n - 1)n$$

wodurch man die Summe des Polynoms (4)

$$= \binom{n}{r+w} \cdot \frac{r(r+1) \ldots (r+w)}{(n-w)(n-w+1) \ldots n} = \binom{n-w-1}{r-1}$$

findet.

Hierdurch geht der Ausdruck (3) in die verlangte Formel

$$(9)\quad u_n = u_0 + \binom{n}{1}\Delta u_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 u_0 + \binom{n}{3}\Delta^3 u_0 + \ldots + \binom{n}{r-1}\Delta^{r-1} u_0$$
$$+ \binom{n-1}{r-1}\Delta^r u_0 + \binom{n-2}{r-1}\Delta^r u_1 + \binom{n-3}{r-1}\Delta^r u_2 + \ldots + \binom{r}{r-1}\Delta^r u_{n-r-1} + \Delta^r u_{n-r}$$

über.

Um eine Anwendung dieser Formel zu zeigen, betrachten wir ein beliebiges Glied einer der aus der Hauptreihe

$$u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ \ldots\ u_n$$

entspringenden Summenreihen. Es ist nämlich die Reihe

$$u_0,\ u_0 + u_1,\ u_0 + u_1 + u_2,\ u_0 + u_1 + u_2 + u_3,$$

die erste Summenreihe der erwähnten Hauptreihe, aus welcher nach demselben Gesetze eine zweite, dritte, u. s. w. abgeleitet werden kann.

Da $u_n = u_{n-1} + \Delta u_{n-1}$, $u_{n-1} = u_{n-2} + \Delta u_{n-2}$ etc. ist, so hat man

$$u_n = u_0 + \Delta u_0 + \Delta u_1 + \Delta u_1 + \Delta u_2 + \Delta u_3 + \ldots + \Delta u_{n-1}$$

woraus hervor geht, dass eine Hauptreihe deren Anfangsglied $u_0 = 0$ ist, als die Summenreihe ihrer ersten Differenzreihe angesehen werden kann, und zwar entspricht das mit dem Zeiger n versehene Glied der Hauptreihe, dem den Zeiger $n-1$ führenden Gliede der Differenzreihe. Aber von der ersten Differenzreihe kann in Bezug auf die zweite Differenzreihe ein Gleiches gesagt werden; daher ist die Hauptreihe die rte Summenreihe ihrer rten Differenzreihe, wenn u_0, Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, ... $\Delta_{r-1} u_0$ verschwinden, oder was dasselbe ist, wenn die r Anfangsglieder u_0, u_1,

$u_2, u_3, \ldots u_{r-1}$ der Hauptreihe gleich Null sind. Unter dieser Voraussetzung gibt die Formel (9)

$$(10)\quad u_n = \binom{n-1}{r-1}\Delta^r u_0 + \binom{n-2}{r-1}\Delta^r u_1 + \binom{n-3}{r-1}\Delta^r u_2 + \ldots + \binom{r}{r-1}\Delta^r u_{n-r-1} + \Delta^r u_{n-r}$$

Bezeichnen wir die Glieder der rten Summenreihe für die Grundreihe

$$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots u_n, \ldots$$

durch $S^r u_0, S^r u_1, S^r u_2, S^r u_3 \ldots S^r u_n$ so haben wir, wenn wir in (10) $n + r$ statt n und $u_0, u_1, u_2, u_3 \ldots$ statt $\Delta^r u_0, \Delta^r u_1, \Delta^r u_2, \Delta^r u_3, \ldots$ schreiben,

$$(11)\quad S^r u_n = \binom{n+r-1}{r-1}u_0 + \binom{n+r-2}{r-1}u_1 + \binom{n+r-3}{r-1}u_2 \ldots + \binom{r}{r-1}u_{n-1} + u_n$$

oder, was dasselbe ist

$$(12)\quad S^r u_n = u_n + r u_{n-1} + \frac{r(r+1)}{1 \cdot 2}u_{n-2} + \frac{r(r+1)(r+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}u_{n-3} + \ldots + \frac{r(r+1)(r+2)\ldots(r+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}u_0$$

b) Ausdruck für das zum Zeiger n gehörende Glied u_n einer arithmetischen Reihe

$$u_0, u_1, u_2, u_3 \ldots u_n, \ldots$$

vom mten Range durch die m + 1 Anfangsglieder derselben.

Euler hat bereits in seinen Institut. calculi differentialis pag. 44 etc. das Bildungsgesetz dieses Ausdruckes angedeutet, jedoch dasselbe bloss auf Induction gegründet. Folgende Betrachtungen führen zu einem allgemeinen Beweise desselben.

Es ist für die vorliegende arithmetische Reihe nach der obigen Formel (1)

$$u_n = u_0 + \binom{n}{1}\Delta u_0 + \binom{n}{2}\Delta^2 u_0 + \binom{n}{3}\Delta^3 u_0 + \cdots + \binom{n}{m}\Delta^m u_0$$

weil die höheren Differenzen $\Delta^{m+1}u_0$, $\Delta^{m+2}u_0$, ... bei einer Reihe vom $m$ten Range verschwinden.

Setzt man hier $u_1 - u_0$, $u_2 - \binom{2}{1}u_1 + u_0$, $u_3 - \binom{3}{1}u_2 + \binom{3}{2}u_1 - u_0$, etc. statt Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$, etc., so wird

$$(13)\quad u_n = u_0\left[1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots (-1)^m\binom{n}{m}\right]$$

$$+ u_1\left[\binom{n}{1} - \binom{2}{1}\binom{n}{2} + \binom{3}{2}\binom{n}{3} - \ldots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m-1}\binom{n}{m}\right]$$

$$+ u_2\left[\binom{n}{2} - \binom{3}{1}\binom{n}{5} + \binom{4}{2}\binom{n}{4} - \ldots + (-1)^{m-2}\binom{m}{m-2}\binom{n}{m}\right]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ u_{m-1}\left[\binom{n}{m-1} - \binom{m}{1}\binom{n}{m}\right]$$

$$+ u_m\binom{n}{m}$$

Der Coefficient von u_r in diesem Ausdrucke ist

$$\binom{n}{r} - \binom{r+1}{1}\binom{n}{r+1} + \binom{r+2}{2}\binom{n}{r+2} - \ldots + (-1)^{m-r}\binom{m}{m-r}\binom{n}{m}$$

Man hat aber allgemein

$$\binom{r+p}{p}\binom{n}{r+p} = \frac{(r+p)(r+p-1)\ldots(r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,p} \times$$

$$\times\,.\,\frac{n(n-1)\,.\,.\,.\,(n-r-p+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,(r+p)}$$

$$= \frac{n(n-1)\,.\,.\,.\,(n-r-p+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,p\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,r}$$

$$= \frac{n(n-1)\,.\,.\,.\,(n-r+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,r} \times$$

$$\times\,.\,\frac{(n-r)\,.\,.\,.\,(n-r-p+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,p}$$

$$= \binom{n}{r}\binom{n-r}{p}$$

folglich ist der genannte Coefficient

$$= \binom{n}{r}\left[1 - \binom{n-r}{1} + \binom{n-r}{2} - \ldots\ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (-1)^{m-r}\binom{n-r}{m-r}\right]$$

Der Beschaffenheit der Binomialcoefficienten gemäss ist allgemein

$\binom{n-r}{q} - \binom{n-r-1}{q-1} = \binom{n-r-1}{q}$, also wegen

$$1 - \binom{n-r}{1} = -\binom{n-r-1}{1}$$

$$1 - \binom{n-r}{1} + \binom{n-r}{2} = \binom{n-r}{2} - \binom{n-r-1}{1} = \binom{n-r-1}{2}$$

und eben so

$$1 - \binom{n-r}{1} + \binom{n-r}{2} - \binom{n-r}{3} = -\binom{n-r-1}{3}$$

Daher der obige Ausdruck innerhalb der Klammern

$= (-1)^{m-r}\binom{n-r-1}{m-r}$, folglich der zu berechnende Coefficient

$$= (-1)^{m-r}\binom{n}{r}\binom{n-r-1}{m-r}$$

$$= (-1)^{m-r}\,.\,\frac{1}{n-r}\,.\,\frac{n(n-1)..(n-r)\,(n-r-1)..(n-m)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,r\,.\,1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(m-r)}$$

$$= (-1)^{m-r} \cdot \frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1.2\ldots\ldots r} \cdot \frac{n(n-1)\ldots(n-m)}{1.2.3\ldots\ldots m} \cdot \frac{1}{n-r}$$

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-m)}{1.2\ldots\ldots m} \cdot (-1)^{m-r} \binom{m}{r} \cdot \frac{1}{n-r}$$

Der erste Factor gehört offenbar allen Coefficienten gemeinschaftlich zu, daher ist, wenn man die Glieder des Ausdruckes (13) in verkehrter Ordnung schreibt,

$$(14)\quad u_n = \frac{n(n-1)\ldots(n-m)}{1.2\ldots\ldots m}\left[\frac{u_m}{n-m} - \frac{\binom{m}{1}u_{m-1}}{n-m+1} + \frac{\binom{m}{2}u_{m-2}}{n-m+2} - \ldots + (-1)^{m-1}\frac{\binom{m}{m-1}u_1}{n-1} + (-1)^m\frac{u_0}{n}\right]$$

welche Formel die verlangte ist.

c). Recursionsformeln zur Berechnung der Bernouillischen Zahlen.

Es seyen die Zahlen $A_1, A_2, A_3, \ldots A_r, \ldots\ldots$ an die Gleichungen

$$(15)\quad \begin{aligned} &1 + \binom{2}{1}A_1 = 0 \\ &1 + \binom{3}{1}A_1 + \binom{3}{2}A_2 = 0 \\ &1 + \binom{4}{1}A_1 + \binom{4}{2}A_2 + \binom{4}{3}A_3 = 0 \\ &\quad \text{u. s. w.} \\ &1 + \binom{r}{1}A_1 + \binom{r}{2}A_2 + \ldots + \binom{r}{r-1}A_{r-1} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

gebunden, auf welche man bei verschiedenen analytischen Untersuchungen kömmt, z. B. wenn man die Coefficienten in der Formel

$$\Sigma \cdot x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x} + A_1 x^m + A_2 \cdot \frac{m}{2} x^{m-1}\Delta x + A_3 \cdot \frac{m(m-1)}{1.2.3} x^{m-2} \Delta x^2 + \text{etc.}$$

zu bestimmen wünscht, so lassen sich die Werthe von A_1, A_2, A_3, etc. auf bequemerem Wege, als durch unmittelbaren Gebrauch der Gleichungen (15) auf folgende Art ausmitteln.

Man behandle die Gleichungen (15) wie die Glieder einer Reihe, deren Differenzreihen zu suchen sind, so werden zur Bildung der wten Differenz für

$$(16)\quad 1 + \binom{r}{1} A_1 + \binom{r}{2} A_2 + \binom{r}{3} A_3 + \ldots \ldots + \binom{r}{r-1} A^{r-1} = 0$$

die nächsten w darauf folgenden Gleichungen, wovon

$$(17)\quad 1 + \binom{r+w}{1} A_1 + \binom{r+w}{2} A_2 + \binom{r+w}{3} A_3 + \ldots \ldots + \binom{r+w}{r-1} A_{r-1} + \ldots + \binom{r+w}{r+w-1} A_{r+w-1} = 0$$

die letzte ist, in Anspruch genommen. Da die derselben vorangehenden w Gleichungen weniger Glieder enthalten, so setze man denselben die fehlenden Zahlen A_r, A_{r+1}, A_{r+2}, ... mit dem Coefficienten Null verbunden, zu, so dass alle w + 1 Gleichungen aus gleichviel Gliedern bestehen.

Stellt man nun die Gleichung (16) durch

$$1 + \binom{r}{1} A_1 + \binom{r}{2} A_2 + \ldots + \binom{r}{r-1} A_{r-1} + \overset{1}{0} A_r + \overset{2}{0} A_{r+1} + \overset{3}{0} A_{r+2} + \ldots + \overset{n}{0} A_{r+w-1} = 0$$

vor, wobei die Zeiger ober den Nullen der Unterscheidung willen gebraucht werden, so ist ihre wte Differenz

$$A_1 \Delta^w \binom{r}{1} + A_2 \Delta^w \binom{r}{2} + \ldots + A_{r-1} \Delta^w \binom{r}{r-1} + A_r \Delta^w . \overset{1}{0} + A_{r+1} \Delta^w . \overset{2}{0} + \ldots + A_{r+t-1} \Delta^w . \overset{t}{0} + \ldots \ldots + A_{r+w-1} \Delta^w . \overset{w}{0} = 0$$

Nun ist überhaupt

$$\Delta\binom{r}{k} = \binom{r+1}{k} - \binom{r}{k} = \binom{r}{k-1} \text{ folglich}$$

$$\Delta^2\binom{r}{k} = \Delta\binom{r}{k-1} = \binom{r}{k-2} \text{ u. s. w. und}$$

$$\Delta^w\binom{r}{k} = \binom{r}{k-w}$$

woraus erhellet, dass $\Delta^w\binom{r}{k}$ verschwindet, sobald $w > k$ ist.

Ferner hat man, weil der obigen Bezeichnung gemäss $\Delta^w.\overset{t}{0}$ das erste Glied der wten Differenzreihe einer Hauptreihe vorstellt, welche mit t Nullen anfängt, und deren folgende Glieder

$$\binom{r+t}{r+t-1}, \binom{r+t+1}{r+t-1}, \binom{r+t+2}{r+t-1}, \ldots \binom{r+w}{r+t-1}$$

sind,

$$\Delta^w.\overset{t}{0} = \binom{r+w}{r+t-1} - \binom{w}{1}\binom{r+w-1}{r+t-1} + \binom{w}{2}\binom{r+w-2}{r+t-1} - \ldots$$
$$\ldots(-1)^{w-t}\binom{w}{w-t}\binom{r+t}{r+t-1}$$

Aber es ist einerseits $\Delta^w\binom{r}{k} = \binom{r}{k-w}$, und andererseits

$$\Delta^w\binom{r}{k} = \binom{r+w}{k} - \binom{w}{1}\binom{r+w-1}{k} + \binom{w}{2}\binom{r+w-2}{k} - \ldots$$
$$\ldots + (-1)^k\binom{r}{k}$$

folglich auch

$$\binom{r+w}{k} - \binom{w}{1}\binom{r+w-1}{k} + \ldots + (-1)^k\binom{r}{k} = \binom{r}{k-w}$$

Setzt man hier $k = r+t-1$, so ergibt sich, da der erste Theil der Gleichung, wegen dem Verschwinden der Binomialcoefficienten mit negativen Zeigern nur bis zu dem Gliede

$$\binom{w}{w-t+1}\binom{r+t-1}{r+t-1} = \binom{w}{w-t+1}$$

fortgesetzt werden kann, die Gleichung

$$\binom{r+w}{r+t-1} - \binom{w}{1}\binom{r+w-1}{r+t-1} + \dots\dots$$
$$\dots\dots + (-1)^{w-t}\binom{w}{w-1}\binom{r+t}{r+t-1}$$
$$+ (-1)^{w-t+1}\binom{w}{w-t+1} = \binom{r}{r+t-1-w}$$

und hieraus wegen

$$\binom{r}{r+t-1-w} = \binom{r}{w-t+1}$$

$$\Delta^{w} \cdot {}^{t}_{0} = \binom{r}{w-t+1} - (-1)^{w-t}\binom{w}{w-t+1}$$

Nach gehöriger Berücksichtigung dieser Resultate findet man für die wte Differenz, auf welche die Gleichung (16) führt, folgenden Ausdruck

$$(18)\quad A_w + \binom{r}{1}A_{w+1} + \binom{r}{2}A_{w+2} + \dots + \binom{r}{r-w-1}A_{r-1}$$
$$+ \left[\binom{r}{w} - (-1)^w\right]A_r + \left[\binom{r}{w-1} + (-1)^w\binom{w}{w-1}\right]A_{r+1}$$
$$+ \left[\binom{r}{w-2} - (-1)^w\binom{w}{w-2}\right]A_{r+2} + \dots\dots$$
$$\dots\dots + \left[\binom{r}{1} + \binom{w}{1}\right]A_{r+w-1} = 0$$

Setzt man in dieser Gleichung $r + w =$ der ungeraden Zahl $2n - 1$, und insbesondere $r = w = n$, so kommen darin bloss jene der Grössen A_1, A_2, A_3,... vor, deren Zeiger ungerade sind, und zwischen den Grenzen n und $2n - 1$ liegen. Lässt man $n = 2$ seyn, so findet man $3A_3 = 0$, oder $A_3 = 0$; daher müssen, wie man leicht sieht, wenn man $n = 3, 4, 5\dots$ setzt, alle Zahlen, welche durch A mit ungeraden Zeigern vorgestellt werden, verschwinden.

Setzt man aber $w = n$ und $r = n + 1$, also

$r+w-1=2n$, und nach und nach $n=1, 2, 3, \ldots$ so erhält man ein System von Gleichungen, welches mit Zuziehung der Gleichung $1+\binom{2}{1}A_1=0$ zur Berechnung der Werthe von $A_2, A_4, A_6 \ldots$ bequemer ist, als der Inbegriff der Gleichungen (15).

Die Zahlen $A_2, A_4, A_6, A_8, \ldots$ heissen die Bernoullischen Zahlen. Wir wollen sie mit $B_1, B_2, B_3, B_4 \ldots$ bezeichnen.

Bei dem Gebrauche der Gleichung (18) muss selbst unter der Voraussetzung $w=n$ und $r=n+1$ noch unterschieden werden, ob n gerade oder ungerade ist. Es sey erstlich $n=2m$, so hat man, wenn man auf die für ganze positive Werthe von p bestehende Gleichung $\binom{p}{q}=\binom{p}{p-q}$ Rücksicht nimmt:

$$(19)\quad B_m+\left[\binom{2m}{1}+\binom{2m+1}{2}\right]B_{m+1}+\left[\binom{2m}{3}+\binom{2m+1}{4}\right]B_{m+2}+\left[\binom{2m}{5}+\binom{2m+1}{6}\right]B_{m+3}+\ldots \ldots+(4m+1)B_{2m}=0$$

Setzt man aber $n=2m+1$, so wird:

$$(20)\quad \left[1+\binom{2m}{1}\right]B_m+\left[\binom{2m-1}{2}+\binom{2m}{3}\right]B_{m+1}+\left[\binom{2m-1}{4}+\binom{2m}{5}\right]B_{m+2}+\ldots \ldots+(4m-1)B_{2m-1}=0$$

Der Werth von B_1 muss aus den Gleichungen

$$1+2A_1=0, \text{ und } A_1+3A_2=A_1+3B_1=0$$

abgeleitet werden, wovon die letztere aus (18) entspringt, wenn man $w=1$, und $r=2$ seyn lässt. Man findet $A_1=-\frac{1}{2}$, folglich $B_1=\frac{1}{6}$.

Die Werthe von $B_2, B_3, B_4 \ldots$ ergeben sich aus den Gleichungen (19) und (20), wenn man daselbst

nach und nach $m = 1, 2, 3, 4 \ldots$ annimmt, und die aus jeder früheren speciellen Gleichung gewonnenen Werthe in die spätere einführt. Man erhält

$$B_1 + 5B_2 = 0$$
$$B_2 + 14B_3 + 9B_4 = 0$$
$$B_3 + 27B_4 + 55B_5 + 13B_6 = 0$$
$$B_4 + 44B_5 + 182B_6 + 140B_7 + 17B_8 = 0$$

u. s. w.

$$5B_2 + 7B_3 = 0$$
$$7B_3 + 30B_4 + 11B_5 = 0$$
$$9B_4 + 77B_5 + 91B_6 + 15B_7 = 0$$
$$11B_5 + 156B_6 + 378B_7 + 204B_8 + 19B_9 = 0$$

u. s. w.

und hieraus

$$B_2 = -\tfrac{1}{30},\quad B_3 = \tfrac{1}{42},\quad B_4 = -\tfrac{1}{30},\quad B_5 = \tfrac{5}{66},\quad B_6 = -\tfrac{691}{2730},\quad B_7 = \tfrac{7}{6},\quad B_8 = -\tfrac{3617}{510},$$
$$B_9 = \tfrac{43867}{798}, \text{ etc.}$$

Inhalt.

I. Heft.

Seite

II. Heft. Physikalische Abtheilung.

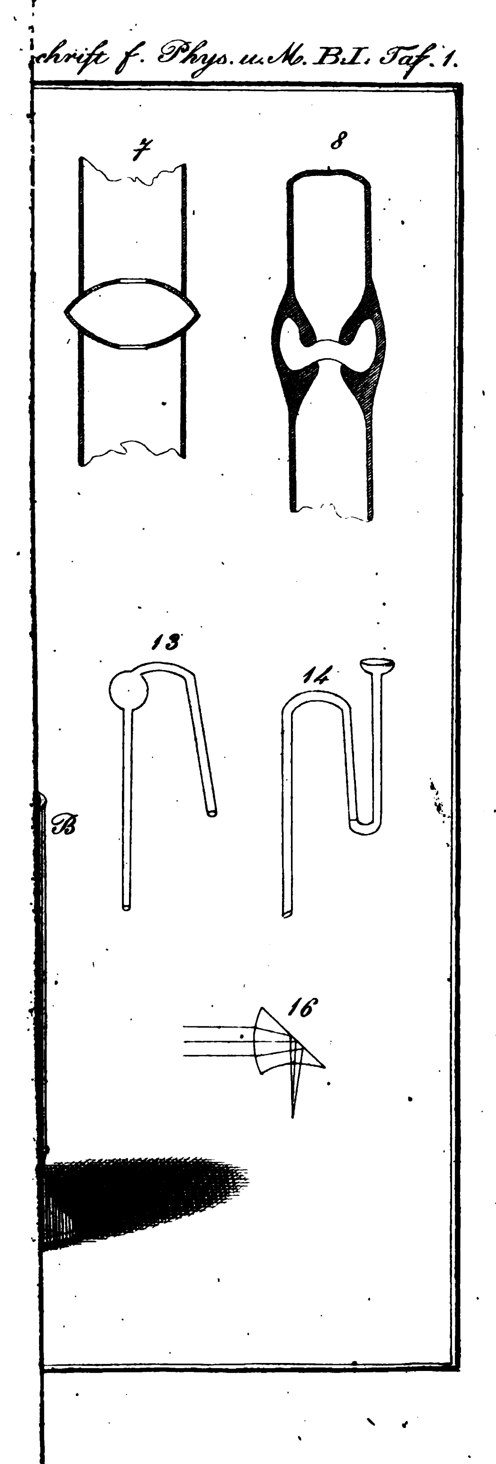
Mathematische Abtheilung.

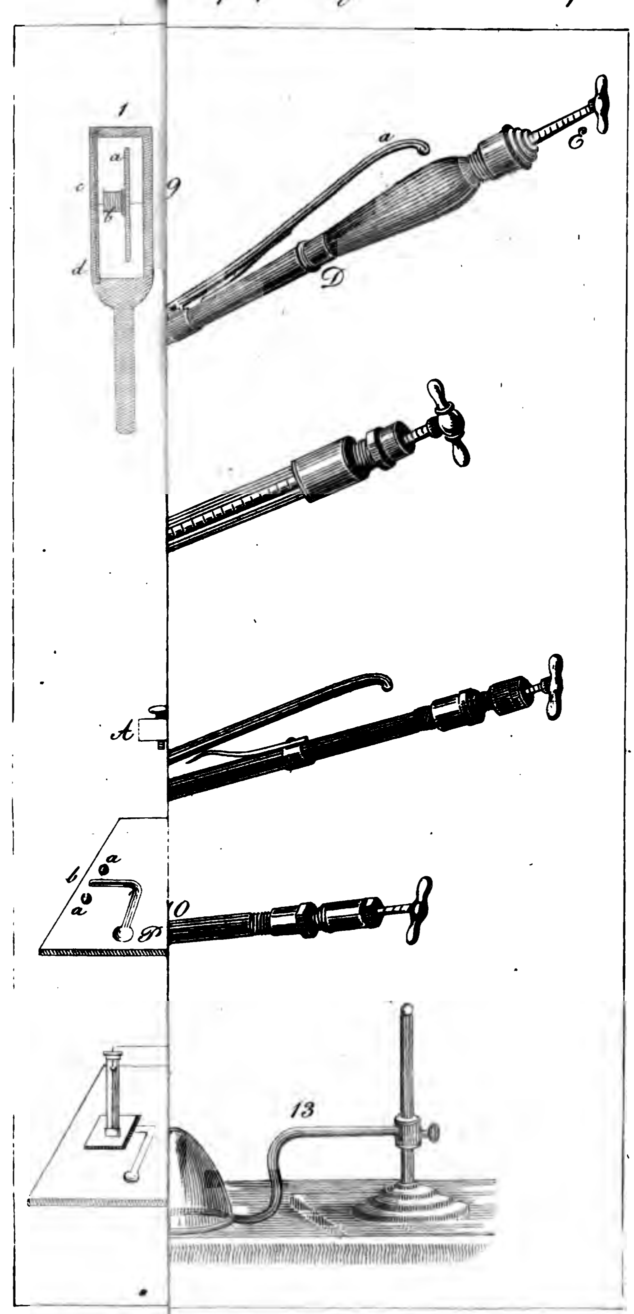
III. Heft. Physikalische Abtheilung.

Mathematische Abtheilung.

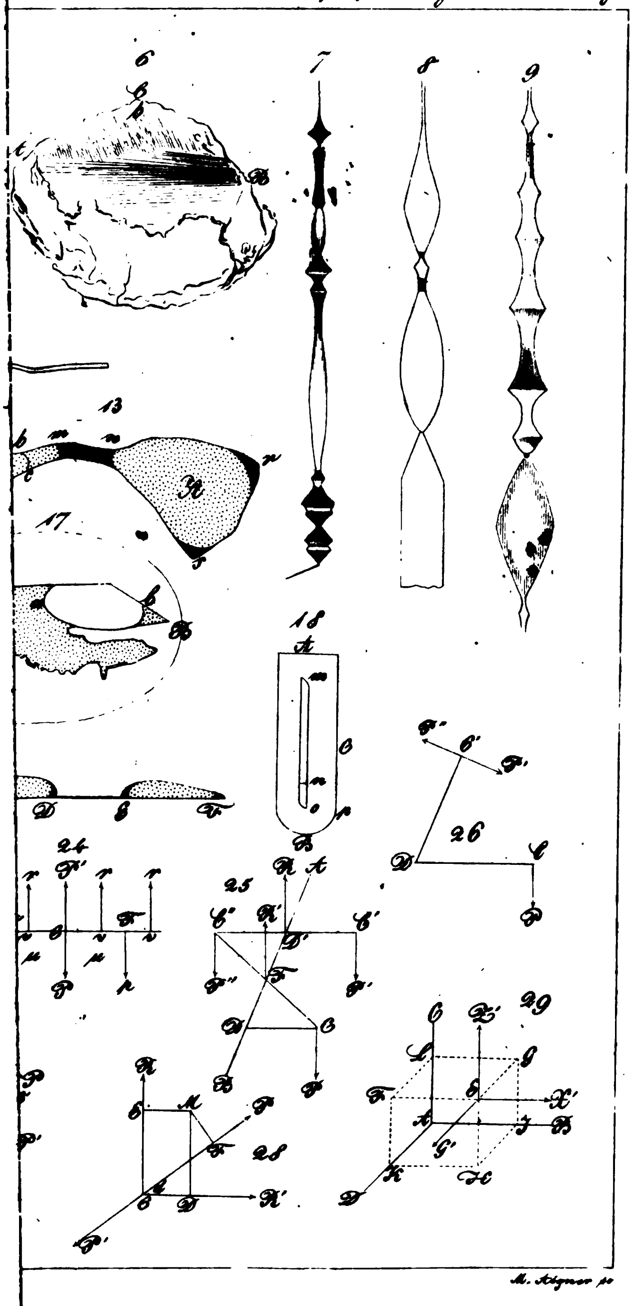
IV. Heft. Physikalische Abtheilung.

Mathematische Abtheilung.


7
8
13
14
B
16


1
a
c
b
d
9
a
E
D
A
b
a
c
a
10
P
13


tschrift f. Phys. u. M. B. I. Taf. 3.
S
G
B
8
O
F
M
P
14
N
L
K
M. Aigner sc.



M. Aigner sc.

